

§5. Построение вероятностных моделей с помощью функций распределения

Лекция 7

В этом параграфе мы будем решать несколько практических задач на построение вероятностных моделей, цель которого состоит в спецификации наиболее узкого семейства возможных распределений наблюдаемой случайной величины X . Эти модели носят универсальный характер и применяются в различных областях науки и практической деятельности, поэтому целесообразно после решения каждой задачи рассмотреть возможные аналоги этих задач, приводящие к тем же вероятностным моделям. Каждой модели мы присвоим свое имя и аббревиатуру, содержащую “параметры” модели; значения параметров, как правило, неизвестны, и определение этих значений составляет предмет другой, родственной теории вероятностей, науки – математической статистики.

Собственно говоря, мы с вами уже давно занимаемся построением вероятностных моделей с помощью функций распределений случайных величин, принимающих дискретный ряд значений, – речь идет о гипергеометрическом и биномиальном распределениях (см. §2 и §3). Вероятность, с которой случайная величина принимала конкретное целочисленное значение m , равна величине скачка функции распределения в точке $x = m$. С этих двух распределений и мы начнем составление нашего каталога вероятностных моделей.

Гипергеометрическое распределение $GG(N, M, n)$. Исследуется конечная популяция, состоящая из N единиц, часть из которых (M единиц) помечены. Из популяции извлекается случайная выборка объема n , и с этой выборкой соотносится случайная величина X , наблюдаемое значение x которой указывает число помеченных единиц в выборке. Область значений X , которые она принимает с ненулевой вероятностью, составляют целочисленные точки отрезка $X = [\max(0, n - (N - M)); \min(n, M)]$.

Функция распределения $F(x)$ равна нулю в области, лежащей слева от X , и как только x выходит на правый конец отрезка X , функция $F(x)$ принимает значение 1, которое сохраняет при всех x , лежащих справа от X . Внутри отрезка X функция распределения имеет ступенчатый вид, возрастая скачками в целочисленных точках $x = m$, и

величина скачка определяется формулой (2) §1:

$$P(X = m) = F(m+) - F(m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m \in \mathcal{X}.$$

Переменные N , M и n являются *параметрами* модели; в практических приложениях модели $GG(N, M, n)$ значение по крайней мере одного из параметров N или M неизвестно. Область возможных значений параметров составляет так называемое *параметрическое пространство* и обозначается обычно Θ . В данном случае Θ состоит из целочисленных значений параметров N , M и n , причем $N \geq 2$, $1 \leq M \leq N$, $1 \leq n \leq N$.

Итак, дискретная вероятностная модель гипергеометрического распределения полностью определяется “функцией скачков” $f(x | \theta)$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta = (N, M, n) \in \Theta$, которая принимает ненулевые значения $P(X = x)$ только в целочисленных точках x отрезка \mathcal{X} . Функция $f(\cdot | \theta)$ обычно называется *функцией плотности* распределения случайной величины X . Вероятность события вида $X \in B$ ($B \in \mathcal{B}$) вычисляется с помощью f по формуле

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B} f(x | \theta),$$

в частности, функция распределения

$$F(x) = \sum_{t < x} f(t | \theta).$$

Биномиальное распределение $B(n, p)$. Рассматривается схема независимых испытаний, каждое из которых с некоторой вероятностью p может быть “успешным” (в результате испытания осуществилось некоторое событие A) или, с вероятностью $1 - p$, “неудачным”. Нас интересует распределение случайной величины X , результат x наблюдения которой регистрирует число успехов в n испытаниях Бернулли.

Как было установлено в §3, распределение X определяется функцией плотности $f(x | \theta)$, принимающей ненулевые значения $C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}$ ($= P(X = x)$) только в точках $x = 0, 1, \dots, n$, в то время как двумерный параметр $\theta = (n, p)$ может изменяться в области $\Theta = \mathbb{N} \times [0; 1]$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество целых чисел. Поведение биномиальной функции распределения аналогично поведению $F(x)$ в модели $GG(N, M, n)$, если считать, что отрезок $\mathcal{X} = [0; n]$.

В практических применениях биномиального распределения обычно неизвестно только значение параметра p – вероятности успеха в испытаниях Бернулли. Однако существуют ситуации, когда экспериментатор регистрирует только число успехов x , не имея сведений о числе испытаний n . Например, в исследованиях нервного синапса прибор регистрирует только общее напряжение электрического поля, и по величине этого напряжения определяется количество x пузырьков с ацетилхолином, освободившихся при раздражении нерва. Ни общее количество n пузырьков, ни вероятность p выброса из пузырька ацетилхолина, экспериментатору неизвестны, – проблема оценки параметров n и p составляет предмет исследования.

Особо следует отметить частный случай биномиального распределения с одним испытанием ($n = 1$) в схеме Бернулли. Это так называемое *двухточечное* распределение вероятностей $B(1, p)$ с функцией плотности

$$f(x | p) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

В §3 было установлено, что модель $B(n, p)$ является „предельной” для модели $GG(N, M, n)$, когда размер N популяции неограниченно растет и число M помеченных единиц соизмеримо с N , то есть $M/N = p$ ($= \text{const}$). Следующая вероятностная модель, имеющая широкие практические применения, является предельной для биномиальной модели, когда число проводимых испытаний n велико, а вероятность p успешного испытания чрезвычайно мала.

Распределение Пуассона $P(\lambda)$. При исследовании интенсивности радиоизлучения обычно регистрируется число x атомов радиоактивного элемента, распавшихся за единицу времени. Повторные наблюдения указывают на значительную изменчивость числа распавшихся атомов, и поэтому проблема стабильного, не зависящего от случайных флуктуаций, показателя интенсивности излучения должна решаться в рамках теории вероятностей.

Пусть X – случайная величина, которая наблюдается в эксперименте, n – число атомов, из которых состоит образец исследуемого радиоактивного элемента, p – вероятность, с которой возможен распад любого из атомов образца за время наблюдения. Существующая теория радиоактивного излучения утверждает, что атомы распадаются независимо друг от друга, и поэтому результат x , который фиксиру-

ет счетчик распавшихся атомов, можно трактовать как реализацию случайной величины X с биномиальным законом $B(n, p)$ распределения вероятностей. Легко понять, что расчет вероятностей исходов эксперимента по формуле

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

вряд ли возможен из-за непреодолимых технических сложностей, вызванных огромным значением n и ничтожно малым значением p . Поэтому возникает математическая проблема асимптотики биномиальных вероятностей, когда $n \rightarrow \infty$ и одновременно $p \rightarrow 0$. Решение проблемы дает

Предложение 5.1. Если $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ и при этом $np = \lambda$ ($= \text{const}$), то

$$P\{X = x | n, p\} \longrightarrow \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

Доказательство. Предельное значение биномиальных вероятностей легко получить, если представить их в виде

$$P\{X = x | n, p\} = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{\lambda^x}{x!}$$

и воспользоваться замечательным пределом $(1 - \lambda/n)^n \rightarrow e^{-\lambda}$.

Этот асимптотический результат впервые был получен Пуассоном, и поэтому распределение вероятностей

$$P(X = x | \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

называется *распределением Пуассона* и обозначается $P(\lambda)$. Правая часть (1) представляет ненулевые значения функции плотности $f(x | \lambda)$ распределения Пуассона, λ (> 0) называется параметром *интенсивности потока Пуассона* – в терминах задачи с радиоактивным распадом λ равно среднему числу атомов, распавшихся за единицу времени. Функция распределения Пуассона равна нулю на отрицательной полуоси, а на положительной возрастает скачками в целочисленных точках $x = 0, 1, \dots$, величина которых равна правой части (1).

Трудно переоценить значимость закона Пуассона в различных проблемах естествознания. Это распределение используется при исследовании числа несчастных случаев на предприятиях, числа вызовов на телефонной станции; этому закону подчиняются метеорные явления, потоки транспорта, размеры очередей систем обслуживания и пр.

Равномерное распределение $U(a, b)$. На отрезок $[0; 1]$ “наугад” бросается точка, так что вероятность ее попадания в любой интервал $(\alpha; \beta) \in [0; 1]$ зависит только от длины $\beta - \alpha$ интервала и не зависит от его положения внутри отрезка $[0; 1]$. Экспериментатора интересует распределение случайной величины X , реализующей координату x точки после бросания.

Ключ к выводу функции распределения X указывает следующая эквивалентная формулировка условий эксперимента: интервалы одинаковой длины обладают одинаковой вероятностью попадания в них бросаемой точки. Если разделить отрезок $[0; 1]$ на n одинаковых частей, то для функции распределения X имеет место двусторонняя оценка:

$$\frac{[nx]}{n} \leq F(x) \leq \frac{[nx] + 1}{n},$$

где $[t]$ – целая часть t . Действительно, всем отрезкам, полученным в результате деления $[0; 1]$, соответствует одинаковая вероятность, равная $1/n$ попадания в них точки, так что вероятность $P(X < x) = F(x)$ можно оценить количеством отрезков длины $1/n$, покрывающих $[0; x]$. Устремляя теперь n к бесконечности, получаем, что $F(x) = x$, если $x \in [0; 1]$. Поскольку вероятность попадания точки во внешность отрезка $[0; 1]$ равна нулю, то $F(x) = 0$ при $x < 0$ и $F(x) = 1$ при $x > 1$.

Итак, мы построили вероятностную модель равномерного распределения $U(0, 1)$ на отрезке $[0, 1]$. Легко понять, что если аналогичный эксперимент проводится с отрезком $[0, b]$, то функция распределения на этом отрезке будет иметь вид $F(x) = x/b$, так как свойство линейности должно сохраняться в силу принципа случайности бросания точки на отрезок $[0, b]$, и, в то же время, $F(b+) = 1$. Наконец, если точка бросается на отрезок общего вида $[a, b]$, то $F(a) = 0$, $F(b+) = 1$, и поэтому $F(x) = (x - a)/b$. Таким образом мы пришли к равномерному распределению $U(a, b)$ на отрезке $[a, b]$. Это распределение

зависит от двумерного параметра $\theta = (a, b)$ с областью значений (параметрическим пространством) $\Theta = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$.

Равномерное распределение имеет интересную связь с последовательностью испытаний Бернулли. Если представить реализацию x случайной величины X с распределением $U(0, 1)$ в виде двоичной дроби, то ее дробная часть реализует последовательность индикаторов успеха в бесконечной последовательности испытаний Бернулли с $p = 1/2$. Легко проверить, что справедливо и обратное утверждение, что дает один из простейших способов генерирования случайных величин с равномерным законом распределения.

Лекция 8

Показательное распределение $E(\theta)$. Вы, наверное, обратили внимание, что большинство, по крайней мере, “серьезных” изделий, которые выпускают предприятия, снабжается гарантийным сроком службы t_0 , и если изделие отказывает до момента t_0 , то предприятие несет определенные убытки, связанные с ремонтом или заменой изделия. Естественно, долговечность x (или, как говорят англичане, “срок жизни” – lifetime) является реализацией случайной величины X , и только знание ее функции распределения $F(x)$ позволит предприятию установить тот гарантийный срок службы, который отвечает его финансовым возможностям по обеспечению ремонта или замены. Для расчета t_0 необходимо определиться с требуемой надежностью изделия P_0 – “средней” долей изделий, которые обязаны отработать гарантийное время. Зная надежность P_0 , мы находим гарантийный срок t_0 из уравнения $P(X \geq t_0) = 1 - F(t_0) = P_0$. В связи с этим функция $H(t) = 1 - F(t)$, $t \geq 0$, называется *функцией надежности*.

Обычно построение модели надежности изделия опирается на некоторые постулаты, связанные с функционированием изделия, его старением, износом, подверженностью ударным нагрузкам и т.п. Мы рассмотрим сейчас один из таких постулатов применительно к изделиям, которые отказывают не в силу процессов старения, а только по причине резко возросших (так называемых “ударных”) нагрузок на режим его работы. Естественно, в такой ситуации вероятность того, что изделие прослужит еще некоторое время t при условии, что оно

уже отслужило срок s , не должна зависеть от s , то есть

$$P\{X \geq t + s \mid X \geq s\} = \frac{P(\{X \geq t + s\} \cap \{X \geq s\})}{P(X \geq s)} =$$

$$\frac{P(X \geq t + s)}{P(X \geq s)} = P(X \geq t).$$

Таким образом, функция надежности $H(t)$ изделия должна удовлетворять функциональному уравнению

$$H(t + s) = H(t)H(s), \quad t \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (2)$$

Предложение 5.2. Если функция $H(t)$, $t \geq 0$ удовлетворяет крайним условиям $H(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$ и непрерывна справа, то все решения уравнения (2) имеют вид

$$H(t) = e^{-\lambda t},$$

где $\lambda > 0$ – произвольный параметр.

Доказательство. Из уравнения (2) легко вывести, что для любого $c > 0$ и любого целого $n \geq 1$ имеет место соотношение

$$H(nc) = H^n(c). \quad (3)$$

Действительно, в силу (2), используя индукцию, получаем $H(nc) = H((n-1)c + c) = H((n-1)c)H(c) = H((n-2)c)H^2(c) = \dots = H^n(c)$.

Далее, для любых $c > 0$ и целого $m \geq 1$ справедливо равенство

$$H\left(\frac{c}{m}\right) = H^{1/m}(c), \quad (4)$$

которое немедленно следует из (3): $H(c) = H(mc/m) = H^m(c/m)$.

Соотношения (3) и (4) позволяют установить строгое неравенство $0 < H(1) < 1$. Действительно, если допустить противное: $H(1) = 0$, то в силу (4) для любого целого $m \geq 1$ получаем $H(1/m) = H^{1/m}(1) = 0$. Устремляя m к бесконечности и используя свойство непрерывности H справа, получаем противоречие $1 = H(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} H(1/m) = 0$. Аналогично, если предположить, что $H(1) = 1$, то, в силу (3), для любого целого n $H(n) = H^n(1) = 1$ и, в то же время, $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = 0$.

Неравенство $0 < H(1) < 1$ означает, что существует такое $\lambda > 0$, что $H(1) = e^{-\lambda}$. Но тогда, в силу (3) и (4), для любых целых n и m имеем $H(n) = e^{-n\lambda}$, $H(n/m) = H^{1/m}(n) = \exp\{-n\lambda/m\}$. Это означает, что наше предположение доказано для всех рациональных t . Любое другое значение t на положительной полуоси можно сколь угодно точно оценить сверху рациональным числом и затем воспользоваться непрерывностью справа $H(t)$ при переходе в оценке t к пределу.

Итак, мы нашли функцию распределения случайной величины X , реализующую долговечность изделия, $F(x) = 1 - H(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$ в области $x > 0$. Как будет показано в дальнейшем, это распределение тесно связано с распределением Пуассона и параметр λ , как и в модели $P(\lambda)$, характеризует *интенсивность потока отказов*. Однако в теории вероятностей обычно модель показательного распределения параметризуется иным способом, через параметр $\theta = 1/\lambda$, который имеет смысл средней долговечности. Таким образом, показательное распределение $E(\theta)$, которое будет в дальнейшем рассматриваться, имеет функцию распределения $F(x) = 0$ при $x \leq 0$ и $F(x) = 1 - \exp\{-x/\theta\}$, если $x > 0$.

Мы завершим этот параграф построением еще одной дискретной модели теории надежности, в которой прослеживаются первые, пока еще очень смутные, связи пуассоновского и показательного распределений.

Геометрическое распределение $\text{Geo}(p)$. При посадке воздушного лайнера возможен сильный удар о посадочную полосу, который может привести к разрушению шасси. Пусть p – вероятность грубой посадки; нас интересует вероятность того, что шасси не будет разрушено до момента t ($\gg 1$) (надежность шасси).

С подобной задачей мы имели дело в §1 (пример 6), когда определяли вероятность первого появления герба при n -ом испытании правильной монеты ($p = 1/2$). В данном, более общем случае естественно воспользоваться предположением о независимости ситуаций, возникающих при каждой посадке лайнера. Пусть X – случайная величина, принимающая значения $x = 1, 2, \dots$, которые указывают момент разрушения шасси, точнее, номер посадки, которая оказалась грубой. Тогда событие $X = x$ состоит из $x - 1$ благополучных посадок и грубой посадки с номером x , откуда находим функцию плотности

геометрического распределения $\text{Geo}(p)$:

$$f(x | p) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p,$$

если $x \in \mathcal{N}$, и $f(x | p) = 0$ в остальных точках вещественной оси \mathbb{R} .

В дискретной функции надежности

$$H(t) = P(X \geq t) = \sum_{x=t}^{\infty} (1 - p)^{x-1}p = (1 - p)^{t-1}, t \geq 1$$

практический интерес представляют очевидно малые значения p и большие значения t . Найдем асимптотику $H(t)$, положив $p = \lambda/N$, $t = Nx$ и устремив N к бесконечности. Имеем

$$H(Nx) = \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{Nx-1} \rightarrow e^{-\lambda x}.$$

Итак, асимптотический анализ $H(t)$, аналогичный теореме Пуассона, привел нас к функции надежности показательного распределения.

Для того чтобы строить новые вероятностные модели, нам необходимо ближе познакомиться с числовыми и функциональными характеристиками распределений, которые постоянно используются на практике, когда возникает проблема сравнения распределений или характеристика их специфических особенностей. Этому вопросу посвящен следующий параграф.