

В применениях методов теории вероятностей исследователь чаще всего имеет дело с числовыми характеристиками наблюдаемого объекта, которые являются функциями элементарных исходов – состояний объекта. При использовании различных характеристик важным является то обстоятельство, что все они определены на одном и том же пространстве Ω , и если мы приступаем к построению вероятностной модели, на основании которой будет получено распределение наблюдаемой характеристики $X = X(\omega)$, то мы должны понимать, что это распределение индуцировано исходным распределением P на σ -алгебре \mathcal{A} подмножеств Ω . Напомним, что такого рода построения проводились при выводе гипергеометрического и биномиального распределений.

Итак, мы приступаем к теории распределений функций $X = X(\omega)$ на пространстве элементарных исходов, фиксируя некоторое вероятностное пространство (Ω, \mathcal{A}, P) . Областью значений функции X служит евклидово пространство \mathbb{R} , и это пространство является новым пространством элементарных исходов. Поскольку нас, в основном, будут интересовать вероятности попадания значений X в интервалы, то естественно рассмотреть булеву σ -алгебру подмножеств \mathbb{R} , порожденную всевозможными интервалами на прямой \mathbb{R} . Как нам известно из общего курса анализа, такая σ -алгебра \mathcal{B} , состоящая из всевозможных объединений и пересечений счетного числа интервалов, называется *борелевским полем*, и для ее построения достаточно рассмотреть открытые интервалы вида $(-\infty, x)$.

Введем измеримое пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ значений X и рассмотрим следующий, совершенно естественный метод “наведения” распределения P^X на \mathcal{B} посредством вероятности P на \mathcal{A} . Каждому борелевскому множеству $B \in \mathcal{B}$ сопоставим его *прообраз* $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \subset \Omega$. Если $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, то естественно определить вероятность попадания значения X в B как $P^X(B) = P(X^{-1}(B))$. Функции, которые обладают свойством $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ при любом $B \in \mathcal{B}$, называются *измеримыми*, и в дальнейшем будут рассматриваться только такие характеристики наблюдаемого объекта. Мы подошли к основному понятию теории распределений на подмножествах \mathbb{R} .

Определение 4.1. *Случайной величиной* $X = X(\omega)$ называется измеримое отображение измеримого пространства (Ω, \mathcal{A}) на *борелевскую прямую* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Легко понять, что, с точки зрения практических приложений, мы могли бы не обращаться к определению случайной величины, как измеримой функции, а просто сказать, что сейчас мы займемся построением вероятностных моделей, в которых пространство элементарных исходов есть числовая прямая. Тем не менее, чтобы описать класс возможных распределений наблюдаемой случайной величины X иногда просто необходимо знать причину изменчивости состояний объекта (или инструмента исследования), которая обуславливает разные значения в повторных наблюдениях X .

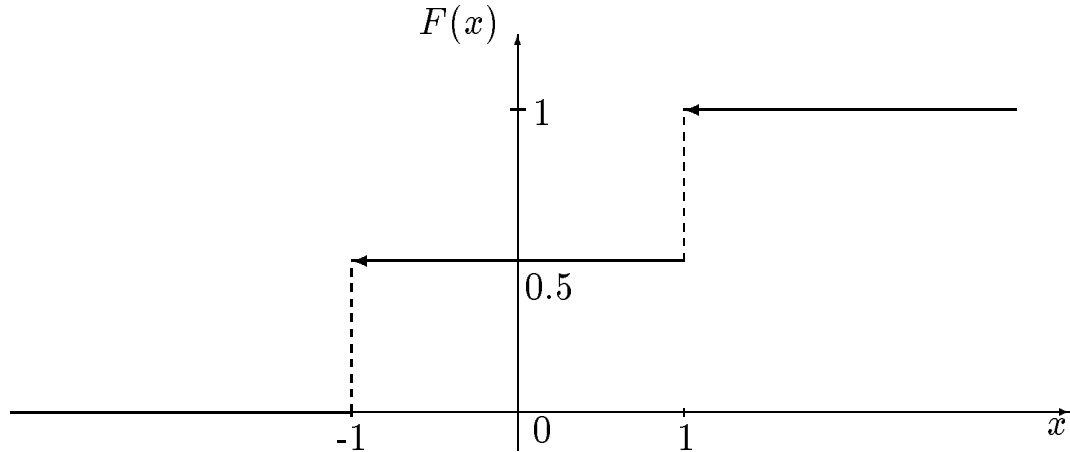
Борелевское поле \mathcal{B} , на котором будет определяться распределение X , является чрезвычайно сложным объектом с точки зрения строения его элементов, поэтому задание функции $P(B)$, $B \in \mathcal{B}$ представляется совершенно неразрешимой проблемой. Однако мы знаем, что \mathcal{B} порождается интервалами вида $(-\infty, x)$ (событиями $X < x$), и это указывает простой путь к заданию распределения случайной величины X . Что если начать с задания вероятности только на событиях, порождающих \mathcal{B} , то есть с определения функции $F(x) = P(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$, потом распространить ее аддитивным образом на булеву алгебру конечных объединений всевозможных интервалов на \mathbb{R} , показать, что полученная таким образом аддитивная функция на булевой алгебре обладает свойством непрерывности относительно монотонно убывающих последовательностей событий (является вероятностью) и, наконец, закончить построение вероятности на \mathcal{B} ссылкой на теорему об единственности продолжения вероятности с булевой алгебры объединений интервалов на порожденную этой алгеброй σ -алгебру борелевских подмножеств \mathbb{R} .

Мы приступаем к реализации этой программы и введем сначала

Определение 4.2. Функция $F(x) = P(X < x)$, определенная на всей числовой прямой \mathbb{R} , называется *функцией распределения* случайной величины X .

Пример 4.1. Пусть случайная величина X принимает с ненулевой вероятностью всего два значения: $x = -1$ с вероятностью $1/2$ и $x = +1$ с той же вероятностью $1/2$ (игра в орлянку со ставкой 1

рубль). Тогда функция распределения X имеет следующий вид.



Действительно, для любого $x < -1$ множество $(-\infty, x)$ не содержит значений X , которые она могла бы принять с положительной вероятностью, так что $F(x) = P(X < x) = 0$. Далее, $F(-1) = P(X < -1) = 0$, но если $-1 < x \leq +1$, то $F(x) = P(X = -1) = 1/2$. В области $x > +1$ содержатся все значения случайной величины X , которые она принимает с положительной вероятностью, поэтому $F(x) = 1$ при $x > +1$.

Исследуем некоторые особенности поведения функции F .

Предложение 4.1. Функция $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами.

$$(F1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

$$(F2) \quad F(x) \text{ — неубывающая функция } x \in \mathbb{R}.$$

$$(F3) \quad \text{Функция } F(x) \text{ непрерывна слева: } \lim_{x \rightarrow a-} F(x) = F(a).$$

(F4) Вероятности попадания значений случайной величины X в интервалы на \mathbb{R} вычисляются по формулам

$$P\{X \in [a, b)\} = F(b) - F(a), \quad P\{X \in [a, b]\} = F(b+) - F(a),$$

$$P\{X \in (a, b]\} = F(b+) - F(a+), \quad P\{X \in (a, b)\} = F(b) - F(a+).$$

(F5) Функция $F(x)$ имеет не более чем счетное множество скачков.

Доказательство. (F1). Рассмотрим последовательность событий $\{A_n = (-\infty, x_n), n \geq 1\}$. Если $x_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, то, очевидно, $A_n \downarrow$, и $A_n \uparrow \mathbf{R}(= \Omega)$, если $x_n \rightarrow +\infty$. Так как $F(x_n) = P(X < x_n) = P(A_n)$, то свойства (F1) вытекают из аксиомы непрерывности (P3) вероятности P .

(F2). Если $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$, так как $A_1 = (-\infty, x_1) \subset A_2 = (-\infty, x_2)$ и, в силу свойства монотонности вероятности (см. (3) в предложении 2.2), $F(x_1) = P(A_1) \leq P(A_2) = F(x_2)$.

(F3). Пусть последовательность $x_n \uparrow x$ при $n \rightarrow \infty$, так что соответствующая последовательность событий $A_n = (-\infty, x_n) \uparrow A$. Используя свойство (P3) непрерывности P , получаем $F(x_n) = P(A_n) \rightarrow P(A) = F(x)$, что, по определению, означает непрерывность слева функции $F(x)$.

(F4). Если $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ (см. (3) в предложении 2.2). Из этого свойства вероятности и только что доказанного свойства непрерывности вытекает, что, например, замкнутый интервал $[b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a)$, и поскольку множество $(-\infty, a) \subset (-\infty, b]$, то $P\{X \in [a, b]\} = P\{X \in (-\infty, b]\} - P\{X \in (-\infty, a)\} = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b+) - F(a)$. В последнем равенстве мы использовали запись $F(b+)$ для выражения вероятности события $\{X \leq b\}$. Дело в том, что $P(X < b) = F(b)$, и если в точке b функция $F(x)$ имеет скачок, то его величина равна $F(b+) - F(b)$.

(F5). В этом пункте предложения утверждается, что все скачки (точки разрыва) функции $F(x)$ можно занумеровать. Поступим следующим образом: рассмотрим последовательность множеств $\{A_n, n \geq 1\}$, где A_n есть множество точек разрыва функции $F(x)$ с величиной скачка, не меньшей $1/n$. Поскольку $0 \leq F(x) \leq 1$, то множество A_n конечно и содержит не более чем n точек. Следовательно, мы можем занумеровать все скачки функции $F(x)$ в порядке убывания их величины, осуществляя последовательную нумерацию точек множества A_1 , потом A_2 и так далее, возможно, до бесконечности, если число скачков $F(x)$ не конечно. При таком способе нумерации любому, сколь угодно малому по величине скачку функции $F(x)$ рано или поздно будет присвоен номер.

Итак, мы убедились, что функция распределения является хорошим и достаточно простым инструментом для вычисления вероят-

ностей попадания значений случайной величины в интервалы на действительной прямой. Однако, если мы определим только вероятности элементов борелевского поля \mathcal{B} , имеющих вид интервалов, то сможем ли на основании их вычислять вероятности других событий из \mathcal{B} ? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4.1. Пусть функция $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, обладает свойствами

- (F1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
- (F2) $F(x)$ – неубывающая функция $x \in \mathbb{R}$;
- (F3) $F(x)$ непрерывна слева: $\lim_{x \rightarrow a-} F(x) = F(a)$.

Тогда на борелевской прямой $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ существует единственная вероятность P , для которой $P\{(-\infty, x)\} = F(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Функция $F(x)$ определяет функцию множеств $P'(C)$ на семействе \mathcal{C} открытых интервалов вида $C = C_x = (-\infty, x)$ посредством равенства $P'(C_x) = F(x)$, причем, в силу свойства (F1), $P'(\Omega) = P'(\mathbb{R}) = 1$. Распространим эту функцию множеств на булеву алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$, порожденную семейством \mathcal{C} . Элементы \mathcal{A} булевой алгебры \mathcal{A} очевидно имеют вид

$$A = \sum_i^k [a_i, b_i), \quad (1)$$

и поэтому естественно положить (см. (F4) в предложении 4.1)

$$P'(A) = \sum_i^k [F(b_i) - F(a_i)]. \quad (2)$$

Очевидно, функция множеств $P'(A)$ на булевой алгебре \mathcal{A} обладает такими свойствами вероятности, как нормируемость (P1) и конечная аддитивность (P2). Если мы покажем, что P' обладает свойством непрерывности P(3), то утверждение теоремы будет простым следствием общей теоремы о продолжении меры на порожденную булевой алгеброй σ -алгебру, ибо, как известно, борелевское поле порождается алгеброй \mathcal{A} (более того, – семейством \mathcal{C}).

Пусть $\{A_n, n \leq 1\}$ – такая последовательность элементов \mathcal{A} , что $A_n \downarrow$. Требуется показать, что $P'(A_n) \rightarrow 0$. Так как A_n имеют вид (1) и $A_n \downarrow$ означает, что все k интервалов в представлении (1) монотонно стягиваются к \emptyset , то достаточно показать $P'(A_n) \rightarrow 0$ для элементов \mathcal{A} вида $A_n = [a_n, b_n)$.

В силу определения (2) функции P' на \mathcal{A} $P'(A_n) = F(b_n) - F(a_n)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что для всех $n > N$ выполняется неравенство $P'(A_n) < \varepsilon$, что, очевидно, эквивалентно утверждению $P'(A_n) \rightarrow 0$.

Для доказательства этого воспользуемся известной из анализа леммой о вложенных отрезках: если $[a_n, b'_n] \downarrow$, то существует такое N , что для всех $n \geq N$ отрезки $[a_n, b'_n] = \emptyset$, и, следовательно, $[a_n, b'_n] = \emptyset$, так что $P'\{[a_n, b'_n]\} = 0$ (обратите внимание на “игру” скобок $[\cdot]$ и $[\cdot)$). По заданному $\varepsilon > 0$, используя свойство (F3) непрерывности слева функции $F(x)$, выберем при каждом $n = 1, 2 \dots$ числа $b'_n \leq b_n$ из условия $F(b_n) - F(b'_n) \leq \varepsilon$. В таком случае $P'\{[a_n, b_n]\} = F(b_n) - F(a_n) \leq F(b'_n) - F(a_n) + \varepsilon = P'\{[a_n, b'_n]\} + \varepsilon$. Начиная с некоторого N все отрезки $[a_n, b'_n]$, а также их подмножества $[a_n, b'_n)$ становятся пустыми множествами, и поэтому $P'\{[a_n, b_n]\} \leq P'(\emptyset) + \varepsilon$ для всех $n \geq N$.

Итак, P' есть вероятность на булевой алгебре \mathcal{A} , и поэтому, в силу теоремы о продолжении вероятности, существует единственная вероятность P на $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, совпадающая с P' на \mathcal{A} .

Доказанная теорема позволяет нам вычислять вероятности событий с помощью интеграла Стильтьеса:

$$P(A) = \int_A dF(x), \quad A \in \mathcal{A}.$$