§3. Условная вероятность и независимость событий

Лекция 4

Понятие вероятностного пространства играет фундаментальную роль в приложениях теории вероятностей, поскольку это – математическая формализация вероятностной модели. Зная распределение вероятностей, мы в состоянии оптимизировать свое поведение при "игре" с природой, производя "ставки" на те события из сигма-алгебры $\mathcal{A}$, которые обладают наибольшей вероятностью. Дальнейшая оптимизация такой игры обычно осуществляется за счет дополнительной информации, которой может располагать игрок, и учет такой информации осуществляется в терминах так называемой *условной вероятности.* Чтобы уяснить смысл этого нового для нас понятия, рассмотрим следующий простой пример.

Бросается правильная кость и нас интересует событие A : выпало 6 очков. Априори вероятность этого события равна $1/6$, но пусть мы располагаем дополнительной информацией, что выпало четное количество очков (событие B). В таком случае вероятность события A должна увеличиться, и для ее пересчета мы должны рассмотреть суженное пространство элементарных исходов $\Omega_B = \{2,\ 4,\ 6\}$. В соответствии с распределением вероятностей на исходном пространстве элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ вероятность $P(B)$ события B (или, что то же, вероятностная мера нового пространства элементарных исходов Ω_B) равна $1/2$. Условие „произошло событие B" делает пространство элементарных исходов Ω_B достоверным событием, и, следовательно, мы должны приписать ему вероятность единица, а вероятности $p(2) = p(4) = p(6) = 1/6$ остальных исходов из Ω_B пронормировать – разделить на меру $P(B) = P(\Omega_B) = 1/2$. Таким образом, *условное распределение* на Ω_B следует вычислять по формуле $p(\omega \cap B) = P(\{\omega\} \cap B)/P(B)$. Итак, искомая вероятность события A при условии, что произошло событие B, (условная вероятность) равна $P(A \,|\, B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Определение 3.1. *Условная вероятность события A относительно события B* (более длинная и устаревшая терминология – *вероятность A при условии, что произошло B*) определяется форму-

лой
$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Введем теперь одно из важнейших понятий теории вероятностей, которое, по существу, выделяет ее в самостоятельную дисциплину из общей теории меры. Если оказывается, что условная вероятность события A относительно события B равна безусловной вероятности события A, то есть $P(A\,|\,B) = P(A\cap B)/P(B) = P(A)$, то естественно сказать, что A *не зависит* от B. Оказывается, что в таком случае и B не зависит от A, то есть события A и B взаимно независимы, поскольку $P(B\,|\,A) = P(A\cap B)/P(A) = P(A)P(B)/P(A) = P(B)$ и, в силу независимости A от B (см. предыдущее равенство), $P(A\cap B) = P(A)P(B)$). Итак, мы пришли к следующему определению взаимной независимости событий.

Определение 3.2. События A и B называются *независимыми*, если
$$P(A\cap B) = P(A)P(B).$$

Легко понять, что несовместные события зависимы. Действительно, справедливо

Предложение 3.1. *Если A, B – несовместные события, причем $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то $P(A\cap B) \neq P(A)P(B)$ (события A и B зависимы).*

Доказательство. Для несовместных событий вероятность их одновременного появления $P(A\cap B) = P() = 0$, и, в то же время, в силу ненулевой вероятности появления каждого из событий, $P(A)P(B) \neq 0$.

Приведем пример независимых событий.

Пример 3.1. Обратимся к эксперименту с двукратным подбрасыванием правильной монеты (см. пример 1.2), в котором пространство элементарных исходов $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$ наделяется равномерным распределением вероятностей: $p(\omega) = 1/4$ при любом $\omega \in \Omega$. Покажем, что выпадение герба при втором подбрасывании не зависит от того, что герб выпал при первом бросании монеты. Рассмотрим два события: $A = \{ГГ, ГР\}$ – при первом бросании появляется герб и $B = \{ГГ, РГ\}$ – второе испытание монеты закончилось выпадением герба, и покажем, что эти события независимы. Действительно, $P(A) = 1/2,\ P(B) = 1/2,\ P(A \cap B) = P(ГГ) = 1/4 = P(A)P(B)$.

Распространим теперь понятие независимости на совокупности событий.

Определение 3.3. События семейства $\mathcal{C} = \{A_i,\ i \in I\}$ называются *независимыми в совокупности* или *совместно независимыми*, если

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right),$$

каков бы ни был конечный набор событий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k},\ k \geq 2$, из совокупности $\mathcal{C}$.

Покажем, что *попарная* независимость событий: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, если $i \neq j$, не влечет, вообще говоря, совместную независимость событий $A_1, \ldots, A_n$.

Пример 3.2 (*Пирамидка Бернштейна*). Правильная четырехгранная пирамида, которая при бросании с одинаковой вероятностью, равной 1/4, падает на любую из четырех граней, раскрашивается в три цвета. Одна грань покрывается красным цветом (элементарный исход ω_1=к), другая – зеленым (ω_2=з), третья – синим (ω_3=с), а четвертая (ω_4=м) делится на три части, каждая из которых закрашивается своим цветом – красным, зеленым и синим.

Рассмотрим три события: $A = \{к, м\}$ – пирамида упала гранью, содержащей красный цвет; $B = \{з, м\}$ – зеленый цвет; $C = \{с, м\}$ – синий цвет. Каждое из этих событий содержит по два равновероятных исхода, поэтому $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$. Если эти события независимы, то, согласно определению 3.3, должно выполняться равенство $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 1/8$. Однако в нашем случае одновременное осуществление всех трех событий возможно лишь при появлении единственного элементарного исхода $\omega_4 = м$, так что $P(A \cap B \cap C) = p(м) = 1/4 \neq 1/8$. Итак, события $A,\ B$ и C зависимы.

В то же время события A, B и C попарно зависимы. Действительно, $P(A \cap B) = p(м) = 1/4 = P(A)P(B)$, и точно такие же равенства справедливы для остальных пар событий.

Распространим теперь понятие независимости на классы событий. Фиксируем некоторое вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ и введем

Определение 3.4. Булевы подалгебры (или σ-подалгебры) $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$ булевой σ-алгебры $\mathcal{A}$ называются *независимыми в совокупности*, если для **любого** набора событий $A_1,\ldots,A_n$ из соответствующих алгебр выполняется равенство

$$P\left(\bigcap_1^n A_i\right) = \prod_1^n P(A_i). \tag{1}$$

Заметим, что в случае булевых подалгебр формула (1), определяющая их независимость, содержит события, взятые одновременно из *всех* алгебр, – не рассматриваются всевозможные различные наборы подалгебр. Такие наборы в (1) получаются автоматически, если некоторые из $A_i = \Omega$, а достоверное событие Ω принадлежит всем подалгебрам σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Пример 3.3 (*независимых булевых подалгебр*). Определение независимости булевых алгебр позволяет дать строгое математическое обоснование независимости результата очередного испытания правильной монеты от того, какими исходами закончились предыдущие испытания, или от того, что будет в будущем. Рассмотрим, как и в примере 1.5, статистический эксперимент, в котором регистрируются результаты n испытаний правильной монеты. Пусть $\mathcal{A}$ – булева алгебра всевозможных подмножеств пространства Ω элементарных исходов этого эксперимента, число которых равно 2^n. В соответствии с вероятностной моделью, обоснование которой было дано в §1, распределение вероятностей $\{P(A),\ A \in \mathcal{A}\}$ на булевой алгебре $\mathcal{A}$ определяется следующим образом: $P(A)$ равна числу элементарных исходов, содержащихся в событии A, поделенное на 2^n. Рассмотрим n подалгебр $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$ булевой алгебры $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}_i$ порождается противоположными событиями A_i – при i-ом испытании выпал герб и A_i^c – выпала решка, то есть $\mathcal{A}_i = \{A_i, A_i^c, \Omega, \}$, $i = 1,\ldots,n$. Покажем, что эти подалгебры независимы в совокупности.

Пусть $B_1,\ldots,B_n$ – некоторый набор элементов (событий) из соответствующих подалгебр. Требуется показать, что

$$P\left(\bigcap_1^n B_i\right) = \prod_1^n P(B_i). \tag{2}$$

Каждое из событий A_i или A_i^c состоит из 2^{n-1} исходов, поэтому $P(B_i) = 1/2$, если $B_i = A_i$ или A_i^c; $P(B_i) = 1$, если $B_i = \Omega$, и $P(B_i) = 0$, если $B_i =$. Таким образом, (2) выполняется тривиальным образом, если хотя бы одно из $B_i =$; достоверные события $B_i = \Omega$ при доказательстве (2) можно просто игнорировать, так что осталось убедиться в справедливости (2), когда все B_i равны A_i или A_i^c, $i = 1, \ldots, n$. Но в таком случае $\bigcap_1^n B_i$ совпадает с одним из элементарных исходов, вероятность которого равна 2^{-n} (значение правой части (2)), и то же значение принимает левая часть (2), поскольку все $P(B_i) = 1/2$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотренный пример указывает нам путь к построению вероятностной модели статистического эксперимента с независимыми испытаниями ,,гнутой" монеты, для которой вероятность выпадения герба отлична от 1/2. Естественно, такого рода испытания осуществляются в практической и научной деятельности не только с гнутой монетой – испытания с бинарными исходами имеют место при контроле качества (изделия могут быть кондиционными и дефектными), эпидемиологических исследованиях (выбранная особь из популяции инфицирована или нет) и т.п. Общая теория экспериментов с бинарными исходами была разработана в XVII веке И.Бернулли и поэтому названа его именем.

Схема испытаний Бернулли. Эксперимент состоит в наблюдении $n(\geq 1)$ однотипных объектов, каждый из которых с одинаковой вероятностью p может обладать определенным признаком или нет. Если i-ый объект обладает указанным признаком, то говорят, что i-ое испытание завершилось успехом, и в журнале наблюдений против i-го объекта ставится цифра 1; отсутствие признака (неудача) отмечается цифрой 0, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, результат эксперимента можно представить в виде последовательности $x_1, \ldots, x_n$ наблюдений случайных индикаторов $X_1, \ldots, X_n$ – случайных величин, принимающих значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1 - p$. В этих обозначениях вероятность того, что при i-ом испытании X_i приняло значение x_i (равное 0 или 1), можно представить формулой

$$P(X_i = x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Как и в испытаниях правильной монеты, пространство Ω элементарных исходов рассматриваемого эксперимента состоит и 2^n элементов вида $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $\mathcal{A}$ – булева алгебра всевозможных подмножеств Ω и $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ – подалгебры $\mathcal{A}$, причем $\mathcal{A}_i$ порождается событием $X_i = x_i$(=0 или 1), $i = 1, \ldots, n$. Если нам *a priori* известно, что как наблюдаемые объекты, так и результаты наблюдений над ними, не оказывают влияния друг на друга, то естественно формализовать эту априорную информацию в виде утверждения: "подалгебры $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ независимы в совокупности". В таком случае вероятность каждого элементарного исхода $x_1, \ldots, x_n$ совпадает с вероятностью одновременного осуществления n независимых событий $X_i = x_i, \ i = 1, \ldots, n$ и, следовательно,

$$P\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i = x_i\right) = p^{\sum_1^n x_i}(1-p)^{n - \sum_1^n x_i}.$$

Полученное распределение вероятностей на пространстве элементарных исходов Ω обладает одной интересной особенностью: C_n^m исходов, содержащих одно и то же количество $m = \sum_1^n x_i$ успешных испытаний, обладают одинаковой вероятностью их появления, равной $p^m(1-p)^{n-m}$. Рассмотрим в связи с этим случайную величину

$$X = \sum_1^n X_i,$$

результат наблюдения которой m трактуется как число успешных испытаний в эксперименте. На пространстве значений $m = 0, 1, \ldots, n$ этой случайной величины получаем распределение вероятностей, которое называется *биномиальным распределением*

$$P(X = m \,|\, p, n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Отметим, что биномиальное распределение служит аппроксимацией гипергеометрического распределения при больших значениях N и M (см. задачу 3 и формулу 2 в §1). Имеет место

Предложение 3.2. *Если в гипергеометрическом распределении* $P(X = m \,|\, N, M, n)$ *параметры* $N \to \infty$, $M \to \infty$ *и при этом* $M/N \to$

p, *то для всех фиксированных* n *и* m

$$P(X=m\,|\,N,M,n)\to P(X=m\,|\,p,n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко получить, используя следующие элементарные преобразования гипергеометрической вероятности:

$$P(X=m\,|\,N,M,n)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=$$

$$\frac{M!}{m!(M-m)!}\cdot\frac{(N-M)!}{(n-m)!(N-M-(n-m))!}\cdot\frac{n!(N-M)!}{N!}=$$

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot[(M-m+1)\cdots(M-1)M]\cdot$$

$$\frac{[(N-M-(n-m)+1)\cdots(N-M+1)(N-M)]}{(N-n+1)\cdots(N-1)N}=$$

$$C_n^m\left[\left(\frac{M}{N}-\frac{m-1}{N}\right)\cdots\left(\frac{M}{N}-\frac{1}{N}\right)\frac{M}{N}\right]\cdot$$

$$\left[\left(1-\frac{M}{N}-\frac{n-m-1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{M}{N}-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N}\right)\right]\cdot$$

$$\left[\left(1-\frac{n-1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot 1\right]^{-1}.$$

Лекция 5

Следующие две формулы условной вероятности играют важную роль при решении многих практических задач. Обе формулы связаны с так называемой *полной группой событий* $\{B_1,\ldots,B_n\}$, которые несовместны $(B_i\cap B_i=\ ,\ i\neq j)$ и в объединении дают все пространство элементарных исходов Ω. Говорят, что эта группа событий определяет *разбиение* Ω, так как $\Omega=\sum_1^n B_i$.

Предложение 3.3 (Формула полной вероятности). *Для любого события* A *и полной группы событий* $\{B_1,\ldots,B_n\}$ *справедлива формула*

$$P(A)=\sum_{i=1}^n P(A\,|\,B_i)P(B_i).$$

Доказательство немедленно следует из следующей цепочки равенств, в которой на последнем этапе используется формула условной вероятности:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \sum_{1}^{n} B_i) =$$

$$P(\sum_{1}^{n} A \cap B_i) = \sum_{1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Предложение 3.4 (Формула Байеса). *Для любого события A и полной группы событий $\{B_1, \ldots, B_n\}$ справедлива формула*

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}.$$

Доказательство. В силу формулы условной вероятности $P(A \cap B_k) = P(A \mid B_k)P(B_k)$, поэтому

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{P(A).}$$

Подставляя в правую часть последнего равенства вместо $P(A)$ ее выражение по формуле полной вероятности, получаем искомую формулу Байеса.

Замечание. Вероятности $P(B_1), \ldots, P(B_n)$ часто называют *априорными* вероятностями группы событий $B_1, \ldots, B_n$, в то время как условные вероятности $P(B_1 \mid A), \ldots, P(B_n \mid A)$ – *апостериорными*, полученными после дополнительного эксперимента, в котором произошло событие A. В связи с этим формула Байеса называется также формулой *обновления априорных вероятностей.*

Приведем несколько задач, решаемых с помощью полученных формул условной вероятности.

Задача 3.1. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, наугад вынимают 2 шара и перекладывают в другую урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Какова вероятность иметь белый шар при случайном выборе одного шара из второй урны после перекладывания?

Эта задача решается обычно с помощью формулы полной вероятности. Пусть A – событие, означающее отбор белого шара. Определим полную группу событий в соответствии с возможными результатами перекладывания: $B_1 = \{Б, Б\}$, $B_2 = \{Б, Ч\} + \{Ч, Б\}$, $B_3 = \{Ч, Ч\}$. Здесь первая буква в фигурных скобках указывает цвет шара (Б – белый, Ч – черный), который был вынут из первой урны первым, а вторая буква – цвет второго шара. Термин "наугад" означает, что вероятность вынуть шар определенного цвета равна отношению числа шаров этого цвета к общему числу шаров в урне. В таком случае, в соответствии с формулой условной вероятности, $P(B_1) = P(Б \cap Б) = P$(второй шар белый | первый шар белый)$\cdot P$(первый шар белый)$=(3/5) \cdot (2/4) = 3/10$. Аналогично, $P(B_2) = (3/5)\cdot(2/4)+(2/5)\cdot(3/4) = 6/10$ и $P(B_3) = (2/5)\cdot(1/4) = 1/10$. Условные вероятности события A вычисляются в соответствии с числом белых шаров во второй урне после добавления в нее двух шаров из первой урны: $P(A \mid B_1) = 6/10$, $P(A \mid B_2) = 5/10$, $P(A \mid B_3) = 4/10$. Формула полной вероятности дает

$$P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{13}{25}. \qquad (1)$$

З а м е ч а н и е к з а д а ч е 3.1. Следует обратить особое внимание на пространство Ω элементарных исходов в этой задаче, – глубоко заблуждается тот, кто наделяет Ω всего двумя элементами Б и Ч. Наш эксперимент состоял не только в отборе шара из второй урны – перед этим производился случайный отбор двух шаров из первой урны, и результат этого отбора влиял на условную вероятность выбора белого шара. Пространство Ω в действительности состоит из восьми элементов

$$\begin{array}{cccc} \text{ББ.Б} & \text{БЧ.Б} & \text{ЧБ.Б} & \text{ЧЧ.Б} \\ \text{ББ.Ч} & \text{БЧ.Ч} & \text{ЧБ.Ч} & \text{ЧЧ.Ч} \end{array} \qquad (3)$$

Здесь первые две буквы до точки указывают цвет шаров, вынутых из первой урны, а буква после точки – цвет шара, вынутого из второй урны после перекладывания. Вычисления, проводимые в (3), представляют собой суммирование вероятностей элементарных исходов, указанных в первой строке таблицы.

Следующая задача удивительно точно иллюстрирует недоразумения, которые могут возникнуть из-за неправильной спецификации пространства элементарных исходов.

З а д а ч а 3.2. Экспериментатор располагает двумя парами шаров одинакового цветового состава БЧ и БЧ. Из каждой пары наугад выбирается по одному шару и бросается в урну, где лежит белый шар. Из трех шаров в урне наугад отбирается один. Какова вероятность, что вынут белый шар?

Мы снова находимся в ситуации, связанной с применением формулы полной вероятности, где полная группа событий соотносится с возможным составом урны: B_1=БББ (в урне 3 белых шара), B_2=ББЧ+БЧБ (в урне 2 белых) и B_3=БЧЧ (в урне 1 белый). Поскольку вероятность выбора шара определенного цвета из каждой пары равна $1/2$ и выбор в каждой паре осуществляется независимо от результата выбора в другой, то вероятности событий из полной группы вычисляются очень просто: $P(B_1) = P(B_3) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$, $P(B_2) = (1/2) \cdot (1/2) + (1/2) \cdot (1/2) = 1/2$. Условные вероятности отбора белого шара при каждом фиксированном составе урны равны $P(A \,|\, B_1) = 1$, $P(A \,|\, B_2) = 2/3$, $P(A \,|\, B_3) = 1/3$. Теперь, используя формулу полной вероятности, находим $P(A) = 1 \cdot (1/4) + (2/3) \cdot (1/2) + (1/3) \cdot (1/4) = 2/3$. Если игнорировать процесс случайного формирования состава урны и считать, что мы имеем дело с двухточечным пространством элементарных исходов $\Omega = \{Б, Ч\}$, то приходим к парадоксальному выводу: состав урны всегда один и тот же – два белых и один черный!

Нетрудно понять, что в этой задаче пространство элементарных исходов то же, что и в предыдущей задаче 3.1 (дополнительный белый шар фиксирован и его можно не учитывать при определении Ω), и наши вычисления $P(A)$ состоят в суммировании вероятностей элементарных исходов первой строки в таблице, представляющей пространство Ω.

З а д а ч а 3.3 *Статистический контроль качества.* Формула Байеса играет большую роль в планировании процедур гарантийного контроля качества выпускаемой продукции. Производитель продукта должен выполнять определенные договорные обязательства перед потребителем, которые, так или иначе, сводятся к ограничениям на долю некондиционной продукции, поставляемой потребителю, или, что то же, доля кондиционной продукции должна быть достаточно высокой. Обеспечение этих ограничений достигается с помощью контроля (как правило, выборочного) производимой продукции. Пусть Q_{in} –доля кондиционной продукции среди изготавливаемой предприятием. Обычно эта доля называется *входным уровнем качества*, и необходимость контроля продукции обуславливается невысоким значением Q_{in}, которое не удовлетворяет потребителя. Если контроль продукции производится на основе обследования только ее части (так называемый *выборочный* или *статистический* контроль качества), то возникает вероятность принятия ошибочного решения о качестве контролируемого продукта: с некоторой вероятностью β процедура контроля может пропустить некондиционный продукт или, наоборот, с вероятностью α отклонить кондиционный. Вероятность β называется *риском потребителя*, а вероятность α – *риском изготовителя.* Существуют методы расчета этих рисков на основе вероятностной модели статистического контроля, с которыми мы познакомимся в курсе математической статистики. Зная значения Q_{in}, α и β, можно, используя формулу Байеса, вычислить *выходной уровень качества* Q_{out} – долю кондиционной продукции, среди отсылаемой потребителю после контроля.

Пусть B_1 – событие, состоящее в том, что поступивший на контроль продукт кондиционен, а $B_2 = B_1^c$ – продукт „плохой". В наших обозначениях $P(B_1) = Q_{in}$. Пусть, далее, A – утверждение о кондиционности продукта после его контроля. Тогда $Q_{out} = P(B_1 \mid A)$ – вероятность кондиционности продукта при условии, что он прошел контроль. Наконец, $P(A \mid B_1) = 1 - \alpha$ и $P(A \mid B_2) = \beta$. По формуле Байеса

$$Q_{out} = P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2)} =$$

$$\frac{(1-\alpha)Q_{in}}{(1-\alpha)Q_{in} + \beta(1-Q_{in})}.$$

Проиллюстрируем расчеты, производимые по этой формуле, на основе конкретных числовых данных. Пусть предприятие работает из рук вон плохо: $Q_{in} = 0.1$ (90% выпускаемой продукции не удовлетворяет нормам качества), но на предприятии существует довольно жесткий контроль, в котором риск потребителя $\beta = 0.01$, а риск изготовителя $\alpha = 0.1$. Тогда выходной уровень качества

$$Q_{out} = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.9 \cdot 0.1 + 0.01 \cdot 0.9} = \frac{10}{11} \approx 0.91,$$

и это совсем неплохо по сравнению с тем, что было до контроля.