

До сих пор мы изучали распределение конечного числа случайных величин $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, заданных на едином вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) , и вывод их совместного распределения сводился, по существу, к построению распределения вероятностей на произведении измеримых пространств значений этих величин (произведении борелевских прямых). Теперь мы приступаем к изучению распределений на бесконечном (возможно несчетном) произведении измеримых пространств. Допустим, что на пространстве элементарных исходов Ω задано семейство случайных величин $\{X_t, t \in T\}$, $X_t = X_t(\omega)$, индексированных параметром t , который пробегает множество значений T (например, векторная случайная величина имеет $T = \{1, \dots, n\}$). Пусть $(\mathcal{X}_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$ – измеримые пространства значений X_t , соответствующие каждому $t \in T$. Мы будем рассматривать только случай $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$ с борелевской σ -алгеброй \mathcal{B}_t подмножеств \mathbb{R} , но для понимания конструкции распределений на бесконечномерных пространствах нам будет важно сохранить индекс t в обозначении пространств значений каждого представителя семейства $\{X_t, t \in T\}$. Мы будем называть это семейство *случайным процессом*.

Если зафиксировать некоторый элементарный исход ω_0 , то мы получим функцию $x(t) = X_t(\omega_0)$ на множестве T со значениями при каждом фиксированном t в \mathcal{X}_t . Эта функция называется *траекторией* или реализацией процесса $X_t, t \in T$. В связи с этим понятием нам будет удобнее трактовать случайный процесс как случайную функцию $X_t = X(t)$, помня при этом, что вся „случайность“ состоит в зависимости $X(t)$ от $\omega \in \Omega$, в то время как траектория $x(t)$ есть „значение“ случайного процесса $X(t)$ при фиксированном ω . Приведем несколько примеров случайных процессов и опишем вид их траекторий.

Пример 15.1 (точечные процессы). На телефонную станцию поступают заявки на междугородние разговоры, и при этом фиксируется время поступления заявки. В таких процессах с появлением определенных событий в случайные моменты времени обычно полагают $x(t)$ равной числу заявок, поступивших за промежуток времени $[0, t]$. Эти процессы служат хорошими математическими моделями при проектировании систем обслуживания (модели теории очередей),

при анализе транспортных потоков на магистралях; они используются в ядерной физике, метеорной астрономии и т.п. Множество T в данном случае – отрезок \mathbb{R}_+ вида $[0, T]$ с возможным бесконечным значением T . Пространство \mathcal{X}_t значений случайного процесса при любом $t \in T$ совпадает с множеством неотрицательных целых чисел. Траектория имеет вид ступенчатой функции, возрастающей скачками в случайные моменты времени, и величина каждого скачка равна единице.

Пример 15.2 (*ветвящиеся процессы*). Наблюдается некоторая биологическая популяция, состоящая из особей, способных размножаться и гибнуть. Такие данные, как число потомков в определенном колене отдельной особи, численность популяции к фиксированному моменту времени t , количества погибших и новорожденных особей и т.п., составляют особый интерес для популяционной генетики, и трудно переоценить роль вероятностных моделей в изучении динамики развития биологической популяции. Аналогичные модели используются в физике элементарных частиц, особенно при изучении ядерных реакций. Пространства T и \mathcal{X}_t те же, что и в первом примере, траектории также имеют вид ступенчатых функций, но величины скачков – произвольные целые числа.

Пример 15.3 (*броуновское движение в капилляре*). Длинный тонкий капилляр наполняется жидкостью, и в середину капилляра помещается частица, диаметр которой не намного меньше диаметра капилляра. Под действием молекул жидкости частица совершает хаотические движения, и для наблюдения за ними вводится система координат: капилляр рассматривается как действительная ось \mathbb{R} с нулем в середине капилляра. В каждый момент времени t (непрерывно) регистрируется расстояние $x(t)$ частицы от середины капилляра (естественно, $x(0) = 0$) с учетом знака (минус – слева от середины, плюс – справа). Если изобразить теперь траекторию движения частицы на плоскости в координатах $(t, x(t))$, то мы получим то, что физики называют траекторией одномерного броуновского движения. Вероятностные модели, определяющие распределения таких процессов, были предложены Винером, Эйнштейном и Смолуховским. В этом примере T – отрезок временной оси, $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$.

Пример 15.4 (*броуновское движение на плоскости*.) В центр

кювета, наполненного тонким слоем жидкости, помещается частица некоторого вещества, которая, как и в предыдущем примере совершает броуновское движение, но не на прямой \mathbb{R} , а на плоскости \mathbb{R}^2 (центр кювета служит началом декартовой системы координат (x, y)). Траектория броуновского движения представляет собой некоторую кривую на плоскости, определяемую параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Естественно, T – отрезок времени, а $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}^2$.

Пример 15.5 (случайное поле.) Отшлифованная поверхность металла обычно подвергается проверке на „шероховатость“, для чего она помещается под микроскоп и измеряются некоторые характеристики отклонения различных точек поверхности металла от плоского уровня. Такая шероховатая поверхность $z = z(u, v)$, где (u, v) – фиксированная система декартовых координат, трактуется как реализация случайного поля $Z = Z(u, v)$, пространство T соответствует части плоскости $\mathbb{R}^2 = \{u, v\}$, занимаемой обрабатываемым объектом, $\mathcal{X}_t = \mathbb{R}$. Пример случайного поля, в котором кроме координат (u, v) пространство T включает временную ось \mathbb{R}_+ , – участок поверхности моря во время шторма.

Зададимся вопросом, какого рода события, связанные с рассмотренными случайными процессами $X(t)$, представляют наибольший интерес для их исследователей? Я бы в первую очередь обратил внимание на событие $\sup_{t \in T} X(t) \geq x_0$, а также на момент времени t , при котором процесс впервые достигнет уровня x_0 . Для того, чтобы вычислять вероятности таких событий, мы должны ввести понятие распределения вероятностей на измеримом пространстве траекторий процесса.

Пространство траекторий трактуется как прямое произведение

$$\mathcal{X} = \prod_{t \in T} \mathcal{X}_t$$

пространств значений процесса в каждой точке $t \in T$. Подмножества этого пространства, определяемые ограничениями вида

$$a_1 < X(t_1) < b_1, \dots, a_n < X(t_n) < b_n$$

при любом конечном n , называются *прямоугольниками*. Конечные объединения всевозможных непересекающихся прямоугольников

(изменяются как значения n , так и наборы точек t_1, \dots, t_n из T) образуют, очевидно, булеву алгебру \mathcal{A} . Наименьшая σ -алгебра \mathcal{F} , содержащая \mathcal{A} , является искомой σ -алгеброй на пространстве траекторий \mathcal{X} .

Таким образом, мы имеем измеримое пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, σ -алгебра \mathcal{F} которого порождается полуалгеброй прямоугольников, и естественно ожидать, что задание совместных функций распределения

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n)$$

случайных величин $X(t_1), \dots, X(t_n)$ при любых $n = 1, 2, \dots$ и любых наборах t_1, \dots, t_n однозначно определяют вероятность на σ -алгебре \mathcal{F} . То, что это действительно так, устанавливает знаменитая теорема А.Н. Колмогорова, положившая начало строгой математической теории случайных процессов. Заметим только, что в этой теореме накладывается естественное условие *согласованности* функций распределения: маргинальные функции распределения, соответствующие части $T_k = t_{i_1}, \dots, t_{i_k}$, $k < n$, набора индексов t_1, \dots, t_n , должны совпадать с теми, что были построены для набора T_k . Впрочем, это условие соблюдается, „автоматически,“ поскольку построение функций распределения производится при произвольных значениях ее аргументов.

Следующие два примера, играющие важную роль в практических применениях теории случайных процессов, иллюстрируют общую методологию и технические приемы, используемые при построении вероятностных моделей случайных процессов.

Пуассоновский процесс

На временной оси $T = \mathbb{R}_+$ в случайные моменты времени появляются некоторые события (см. пример 15.1), и наблюдается траектория $x(t)$ точечного случайного процесса $X(t)$, регистрирующая число событий, появившихся к моменту времени t . Следующие три постулата выделяют пуассоновский процесс из класса всевозможных точечных процессов.

(P1) *Стационарность*. Распределение числа событий, появившихся во временном промежутке $[t_1, t_2]$, зависит только от длины $t_2 - t_1$ этого промежутка, то есть

$$P(X(t_2) - X(t_1) = x) = p_x(t_2 - t_1).$$

(P2) *Независимость приращений.* Для любого упорядоченного набора моментов времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $X(t_k) - X(t_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, где $X(t_0) = X(0) = 0$, независимы в совокупности.

(P3) *Ординарность или разреженность.* Вероятность $p_x(\Delta t) = P(X(t + \Delta t) - X(t) = x)$ того, что за промежуток времени Δt произойдет ровно x ($= 0, 1, \dots$) событий допускает при $\Delta t \rightarrow 0$ асимптотическое представление

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t), p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t); p_x(\Delta t) = o(\Delta t), x \geq 2, .$$

В этом представлении $\lambda > 0$ – числовой параметр, называемый обычно *интенсивностью* пуассоновского потока событий (см. в связи с этим модель пуассоновского распределения в §5).

Используя постулаты (P1)–(P3), построим конечномерные распределения

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n)$$

пуассоновского процесса. Эти построения значительно облегчает

Лемма 15.1. *Функция $p_x(t) = P(X(t) = x)$, $t \geq 0$, $x = 0, 1, \dots$, однозначно определяет все конечномерные распределения пуассоновского процесса.*

Доказательство. Следующая цепочка равенств, в которой сначала используется постулат (P2), а потом – (P1), устанавливает соотношение между конечномерной плотностью процесса f_{t_1, \dots, t_n} и функцией $p_x(t)$:

$$\begin{aligned} f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X(t_1) = x_1, \\ &X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1, \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}) = \\ &\prod_{k=1}^n P(X(t_k) - X(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}) = \\ &\prod_{k=1}^n P(X(t_k - t_{k-1}) = x_k - x_{k-1}) = \\ &\prod_{k=1}^n p_{x_k - x_{k-1}}(t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Вид функции $p_x(t)$, а вместе с ним и конечномерные распределения процесса Пуассона, устанавливает

Теорема 15.1. *Если справедливы постулаты (P1)–(P3), то*

$$p_x(t) = P(X(t) = x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}, \quad t \geq 0, \quad x = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Доказательство. Покажем сначала, что (1) выполняется в случае $x = 0$, для чего исследуем асимптотику при $\Delta t \rightarrow 0$ функции $p_0(t + \Delta t) = P(X(t + \Delta t) = 0)$.

Событие $X(t + \Delta t) = 0$ эквивалентно одновременному осуществлению двух независимых (в силу постулата (P2)) событий: $X(t) = 0$ и $X(t + \Delta t) - X(t) = 0$. Используя постулаты (P1) и (P3), находим, что

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= P(X(t) = 0) \cdot P(X(t + \Delta t) - X(t) = 0) = \\ &= p_0(t) \cdot p_0(\Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)). \end{aligned}$$

Если полученное асимптотическое представление записать в виде

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + o(1)$$

и устремить Δt к нулю, то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

с очевидным начальным условием $p_0(0) = 1$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решение которого с учетом начальных условий

$$p_0(t) = e^{-\lambda t},$$

что совпадает с (1) при $x = 0$.

Проведем аналогичные построения для произвольного целого $x \geq 1$, для чего представим событие $X(t + \Delta t) - X(t) = x$ в виде объединения $x + 1$ несовместных событий $\{X(t) = x - k\} \cap \{X(t + \Delta t) - X(t) = k\}$, $k = 0, 1, \dots, x$. Используя, как и выше, постулаты (P1)–(P3), получаем

$$\begin{aligned} p_x(t + \Delta t) &= P(X(t + \Delta t) = x) = \\ &= \sum_{k=0}^x P(X(t) = x - k, X(t + \Delta t) - X(t) = k) = \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^x P(X(t) = x - k) \cdot P(X(t + \Delta t) - X(t) = k) =$$

$$\sum_{k=0}^x p_{x-k}(t) \cdot p_k(\Delta t) = p_x(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_{x-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Если представить полученное соотношение в виде

$$\frac{p_x(t + \Delta t) - p_x(t)}{\Delta t} = -\lambda(p_x(t) - p_{x-1}(t)) + o(1)$$

и устремить Δt к нулю, то получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений с начальными условиями:

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -\lambda(p_x(t) - p_{x-1}(t)), \quad p_x(0) = 0, \quad x = 1, 2, \dots$$

Поскольку выше мы определили $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, то для $p_1(t)$ имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda(p_1(t) - e^{-\lambda t}), \quad p_1(0) = 0,$$

решение которого стандартными методами дает

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t},$$

что опять совпадает с (1) при $x = 1$.

Дальнейшее построение модели осуществляется по индукции. Предполагается, что (1) справедливо для некоторого $x \geq 2$, и решается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_{x+1}(t)}{dt} = -\lambda \left(p_{x+1}(t) - \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \right), \quad p_{x+1}(0) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что решение этого уравнения с учетом начального условия определяется формулой (1) с заменой x на $x + 1$. Таким образом, построение вероятностной модели пуассоновского процесса завершено.

Интересно заметить, что формула (1) при $t = 1$ дает функцию плотности распределения Пуассона $P(\lambda)$, так что (1) можно трактовать как обобщение теоремы сложения для распределения Пуассона на случай „дробного“ числа слагаемых, по существу же происходит простое суммирование числа событий по всем t единицам времени.

Изучим некоторые свойства процесса Пуассона, которые вскрывают интересные связи распределения Пуассона $P(\lambda)$ с показательным, равномерным и гамма-распределениями. Начнем с выяснения вида распределения промежутков времени между появлениями событий в процессе Пуассона.

Предложение 15.1. *Случайные величины τ_1, \dots, τ_n , реализации которых указывают промежутки времени между появлениями событий в процессе Пуассона, независимы и одинаково распределены по показательному закону $E(\lambda^{-1})$.*

Доказательство. Требуется показать, что совместная функция τ_1, \dots, τ_n

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n \exp \left\{ -\lambda \sum_1^n t_k \right\}, \quad (2)$$

в области $t_{[1]} = \min\{t_1, \dots, t_n\} > 0$.

Выберем $\Delta t < t_{[1]}$ и подсчитаем вероятность того, что в каждом из промежутков $[T_k, T_k + \Delta t)$, где $T_k = t_1 + \dots + t_k$, $k = 1, \dots, n$, произошло только по одному событию, в то время как в промежутках $[0, t_1)$ и $[T_k + \Delta t, T_{k+1})$, $k = 1, \dots, n - 1$, событий не было. Очевидно, при $\Delta t \rightarrow 0$ асимптотика этой вероятности должна иметь вид $f_n(t_1, \dots, t_n)(\Delta t)^n$, и это обстоятельство позволит нам получить искомую функцию плотности f_n .

В силу постулата (P2) независимости приращений все из рассматриваемых $2n$ событий о появлении по одному или полному отсутствию инцидентов в указанных временных промежутках являются независимыми; вероятность появления ровно одного события в каждом из промежутков $[T_k, T_k + \Delta t)$, $k = 1, \dots, n$, равна (постулат (P1)) $p_1(\Delta t)$, а вероятности отсутствия событий в промежутках $[0, t_1)$ и $[T_k + \Delta t, T_{k+1})$ равны соответственно $p_0(t_1)$ и $p_0(t_{k+1} - \Delta t)$, $k = 1, \dots, n - 1$. Таким образом, вероятность совместного осуществления всех $2n$ событий в терминах функции $p_x(t)$ равна

$$p_0(t_1)p_1^n(\Delta t) \prod_1^{n-1} p_0(t_{k+1} - \Delta t). \quad (3)$$

Если $\Delta t \rightarrow 0$, то применение формулы (1) дает

$$p_0(t_1) = \exp\{-\lambda t_1\}, \quad p_1^n(\Delta t) = \lambda^n \exp\{-n\lambda\Delta t\}(\Delta t)^n \sim \lambda^n(\Delta t)^n,$$

$$p_0(t_{k+1} - \Delta t) = \exp\{-\lambda t_{k+1} + \lambda \Delta t\} \sim \exp\{-\lambda t_{k+1}\}.$$

Подставляя полученные асимптотики в (3), получаем с точностью до множителя $(\Delta t)^n$ правую часть (2).

Доказанное предложение позволяет нам достаточно просто установить распределение случайной величины τ , реализация которой соответствует моменту первого достижения пуассоновским процессом заданного уровня h .

Следствие 15.1. *Случайная величина τ имеет гамма-распределение $G(m, \lambda^{-1})$, где параметр формы m принимает целочисленное значение, равное h , если h целое, и равное $[h] + 1$, если h дробное.*

Доказательство. немедленно вытекает из результата предложения 15.1, поскольку

$$\tau = \sum_1^m \tau_k,$$

где τ_1, \dots, τ_m независимы и одинаково распределены в соответствии с показательным распределением $E(\lambda^{-1})$ (напомним, что именно таким образом вводилось гамма-распределение в §12).

Установленная связь гамма-распределения с пуассоновским потоком событий открывает новую область приложений этого распределения. Это – *вероятностные модели износа и старения*. Простейший пример построения такой модели дает исследование процесса износа протектора автомобильной шины. Резонно считать, что различного рода препятствия, возникающие на пути движения автомобиля и приводящие к резкому торможению, реализуют пуассоновский поток событий. Каждое резкое торможение приводит к уменьшению глубины r протектора на определенную (предположим, для простоты, – одинаковую) величину Δr . В таком случае, „облысение” шин наступит после m торможений, где m в соответствии со следствием 15.1 определяется уровнем $h = r/\Delta r$.

Еще одно замечательное свойство пуассоновского процесса, характеризующее особого рода случайность в потоке событий, состоит в следующей специфике условного распределения моментов появления фиксированного числа n событий на фиксированном промежутке времени $[0, T]$. Точная формулировка этого свойства осуществляется в терминах специального случайного вектора, играющего важную роль в математической статистике.

Пусть X_1, \dots, X_n – случайный вектор, заданный на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{A}) , с независимыми одинаково распределенными с плотностью $f(x)$ по мере Лебега компонентами. Вектор $X_{[1]}, \dots, X_{[n]}$, полученный из исходного вектора упорядочиванием его компонент при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$, называется *вариационным рядом*. Таким образом, при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ компоненты вариационного ряда удовлетворяют неравенствам $X_{[1]}(\omega) \leq \dots \leq X_{[n]}(\omega)$, и если $x_1 = X_1(\omega), \dots, x_n = X_n(\omega)$, то $x_{[1]} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_{[2]}$ равен второму по величине значению среди x_1, \dots, x_n , $x_{[3]}$ – третьему и т.д., так что реализация (при элементарном исходе ω) последней компоненты вариационного ряда $x_{[n]} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

Функция плотности исходного вектора X_1, \dots, X_n с независимыми, одинаково непрерывно распределенными компонентами равна

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k),$$

а функция плотности вариационного ряда отлична от нуля только в области $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ и равна $g_n(x_1, \dots, x_n) = n! f_n(x_1, \dots, x_n)$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно применить метод, который использовался при доказательстве последнего предложения.

Для каждого фиксированного ряда $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ аргументов функции плотности $g_n(\cdot)$ и $\Delta x < \min_{1 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$ вычислим вероятность события A , состоящего в том, что одна из компонент исходного вектора X_1, \dots, X_n попадет в интервал $[x_1, x_1 + \Delta x)$ (событие A_1), другая, из оставшихся $n - 1$ компонент, в интервал $[x_2, x_2 + \Delta x)$ (событие A_2), и т.д., так что последняя из оставшихся компонент должна попасть в интервал $[x_n, x_n + \Delta x)$ (событие A_n). В силу независимости компонент события A_1, \dots, A_n независимы, и поэтому

$$P(A) = P\left(\bigcap_1^n A_k\right) = \prod_1^n P(A_k).$$

Если $F(x)$ – функция распределения, соответствующая плотности $f(x)$, то вероятность события A_1 равна $n [F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)]$, поскольку у каждой компоненты вероятность попасть в указанный интервал $[x_1, x_1 + \Delta x)$ одна и та же и равна разности значений функции распределения на концах интервала, а само событие A_1 состоит из n несовместных событий попадания соответствующих компонент

в этот интервал. Вероятность события A_2 , состоящего из $n - 1$ несовместных событий попадания одной из оставшихся компонент случайного вектора в интервал $[x_2, x_2 + \Delta x)$, в силу тех же доводов равна $(n - 1) [F(x_2 + \Delta x) - F(x_2)]$. Продолжая в том же духе, придем к последнему событию A_n , вероятность которого равна $F(x_n + \Delta x) - F(x_n)$. Перемножая эти вероятности, получаем

$$P(A) = n! \prod_{k=1}^n [F(x_k + \Delta x) - F(x_k)],$$

что при $\Delta x \rightarrow 0$ эквивалентно $n! f_n(x_1, \dots, x_n) (\Delta x)^n$, так что множитель перед $(\Delta x)^n$ дает искомую функцию плотности $g_n(x_1, \dots, x_n)$ вариационного ряда.

В частности, функция плотности вариационного ряда равномерного на интервале $[0, T]$ распределения

$$g_n(x_1, \dots, x_n) = n! T^{-n}, \quad 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq T. \quad (4)$$

Теперь сформулируем обещанное свойство пуассоновского процесса.

Предложение 15.2. Совместное распределение моментов $\tau_1, \dots, \dots, \tau_n$ появления n событий на интервале $[0, T]$ пуассоновского процесса при условии, что в этом интервале появилось ровно n событий, совпадает с распределением вариационного ряда равномерного на интервале $[0, T]$ распределения.

Доказательство. Снова используем метод асимптотического представления функции плотности. Выберем на интервале $[0, T]$ упорядоченный ряд из n точек $0 < t_1 < \dots < t_n < T$, а также выберем Δt , меньшее любого из промежутков, ограниченных точками t_1, \dots, t_n . Пусть $A = B_0 \cap_1^n (A_k B_k)$ – событие, состоящее в том, что в каждом из интервалов $[t_k, t_k + \Delta t)$, $k = 1, \dots, n$, появится ровно по одному пуассоновскому событию (эти пуассоновские события обозначаются A_k), а в интервалах $[0, t_1)$, $[t_k + \Delta t, t_{k+1})$, $k = 1, \dots, n - 1$, $[t_n + \Delta t, T]$ пуассоновских событий не было (эти „подсобытия” обозначаются B_k , $k = 0, \dots, n$). Событие, состоящее в том, что на интервале $[0, T]$ появилось ровно n пуассоновских событий (условие) обозначим B . В этих обозначениях доказательство предложения состоит в выводе следующей асимптотической формулы (см. формулу (4)): $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B) = n! T^{-n}$.

Повторяя рассуждения, которые мы проводили при доказательстве предложения 15.1 при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$P(A \cap B) = (\lambda \Delta t)^n \exp \left\{ -\lambda \left[\Delta t + t_1 + \sum_1^{n-1} (t_{k+1} - t_k - \Delta t) + T - t_n - \Delta t \right] \right\} \sim \lambda^n \exp \left\{ -\lambda \left[t_1 + \sum_1^{n-1} (t_{k+1} - t_k) + T - t_n \right] \right\} (\Delta t)^n = \lambda^n e^{-\lambda T} (\Delta t)^n.$$

Поскольку вероятность появления ровно n событий в промежутке $[0, T]$ равна $P(B) = (\lambda T)^n e^{-\lambda T} / n!$, то

$$g_n(t_1, \dots, t_n) (\Delta t)^n \sim P(A \cap B) / P(B) \sim n! T^{-n}.$$

Доказанное предложение проливает свет на феномен пуассоновости спорадического фона метеоров (см. пример 7 из §1). По-видимому, спорадические метеорные частицы равномерно заполняют пространство около орбиты Земли, и при ее движении мы наталкиваемся на отдельные частицы (пуассоновские события) так, что моменты этих столкновений выстраивают вариационный ряд равномерного распределения.

Винеровский процесс

Вернемся к примеру 15.4 и рассмотрим броуновское движение на плоскости. Частица вещества помещается в начало декартовой системы координат (x, y) на плоскости, и траектория ее движения описывается кривой с параметрическим уравнением $x = x(t)$, $y = y(t)$. Нас интересуют конечномерные распределения двумерного процесса $Z(t) = (X(t), Y(t))$, для чего достаточно определить совместную функцию распределения

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) = P(X(t_1) < x_1, Y(t_1) < y_1, \dots, X(t_n) < x_n, Y(t_n) < y_n).$$

Мы начнем с очевидного условия независимости и одинаковой распределенности компонент $X(t)$ и $Y(t)$ процесса $Z(t)$. Хаотическое движение отдельных, не связанных друг с другом молекул толкает частицу в направлении оси OX вне зависимости от того, что делают

другие молекулы, способствующие ее движению в направлении OY . Таким образом, броуновское движение на плоскости можно рассматривать как прямое произведение двух одномерных одинаково распределенных броуновских движений. Существует несколько моделей одномерного броуновского движения $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, из которых мы остановимся на простейшей, предложенной Н. Винером в начале XX века, и поэтому носящей название *винеровского процесса*.

Построение модели осуществляется по аналогии с выводом нормального распределения путем предельного перехода в биномиальном распределении при неограниченном возрастании числа испытаний Бернулли. Разобьем временную ось $T = \mathbb{R}_+$ на малые интервалы одинаковой длины $1/n$, введем „дискретное время“ $t = k/n$, $k = 0, 1, \dots$, и будем предполагать, что частица движется „рывками“ в эти моменты времени, передвигаясь с вероятностью $1/2$ вправо на некоторую величину α или, с той же вероятностью $1/2$, влево на такую же величину α , которая не зависит от времени t . Такой дискретный случайный процесс $X_n(t)$, $t = k/n$, $k = 0, 1, \dots$, траектория $x_n(t)$ которого определяет положения частицы в капилляре в моменты времени t , можно представить в виде суммы независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих всего два равных по модулю значения. Итак, пусть X_1, X_2, \dots – бесконечная последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения $+1$ или -1 с одинаковой вероятностью $1/2$. Тогда

$$X_n(t) = \alpha \sum_{i=0}^{tn} X_i,$$

при любых $t = k/n$, $k = 0, 1, \dots$.

Так как случайные величины $X_n(t_1), \dots, X_n(t_m)$ однозначно определяются *приращениями* $X_n(t_i) - X_n(t_{i-1})$, $i = 1, \dots, m$, $t_0 = 0$, $X_n(0) = 0$ процесса $X_n(t)$ и эти приращения независимы в совокупности в силу независимости бинарных случайных величин X_1, X_2, \dots , а

$$X_n(t_i) - X_n(t_{i-1}) = \sum_{j=nt_{i-1}+1}^{t_i} X_j,$$

то конечномерные распределения процесса с *независимыми приращениями* $\{X_n(t), t \geq 0\}$ однозначно определяются распределениями случайной величины $X_n(t)$ при каждом фиксированном значении t . Это

есть следствие не только независимости бинарных случайных величин, но и того, что приращение $X_n(t_i) - X_n(t_{i-1})$ имеет то же распределение, что и $X_n(t_i - t_{i-1})$. Поэтому, если $f(x | t)$ – функция плотности $X_n(t)$, то функция плотности конечномерных распределений процесса равна

$$\prod_1^m f(x_i - x_{i-1} | t_i - t_{i-1}),$$

где, как и выше, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$.

Не трудно понять, что мы затеяли всю эту игру с дискретным движением броуновской частицы только для того, чтобы потом перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, воспользовавшись центральной предельной теоремой. Но в таком случае необходимо нормировать $\sum_1^n X_i$. Так как $\mathbf{E}X_i = 0$, а $\mathbf{D}X_i = 1$, то условие невырождаемости процесса $X_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ состоит в выборе α пропорциональным $1/\sqrt{n}$. В связи с этим вводят параметр σ^2 , который называют *коэффициентом диффузии* (он характеризует скорость движения частицы), и полагают $\alpha = \sigma/\sqrt{n}$. При таком выборе α мы получаем дискретный случайный процесс

$$X_n(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sum_0^{tn} X_i.$$

В силу центральной предельной теоремы при каждом фиксированном значении t случайная величина $X_n(t)$ сходится слабо к случайной величине с нормальным $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ распределением. Используя теперь представление конечномерных распределений через распределения приращений, мы можем дать следующее определение винеровского процесса.

Определение 15.1. Случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$, у которого функция плотности конечномерного распределения определяется формулой

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} \sigma^n \prod_1^n (t_i - t_{i-1})^{-1/2}.$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_1^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(t_i - t_{i-1})} \right\},$$

называется *винеровским случайным процессом*.

Как и в случае пуассоновского процесса, для практических приложений несомненный интерес представляет распределение случайной величины $\tau = \inf\{t : X(t) \geq h\}$, реализация которой соответствует моменту первого достижения винеровским процессом уровня $h > 0$. К сожалению, для винеровского процесса техника вывода распределенных функционалов от траекторий процесса достаточно сложна, и для овладения этой техникой требуется специальный аппарат, во многом выходящий за рамки общего курса теории вероятностей. Однако, что касается дискретного аналога винеровского процесса, который мы рассматривали до определения 15.1, то здесь распределение „первого перескока” можно получить, используя несложную технику комбинаторных выкладок.

Рассмотрим, как и выше, последовательность независимых случайных величин $\{X_i, i \geq 1\}$, принимающих всего два значения $+1$ и -1 с одинаковыми вероятностями $1/2$. Введем дискретный случайный процесс

$$S(t) = \sum_{i=0}^t X_i, \quad t = 0, 1, \dots; \quad S(0) = 0$$

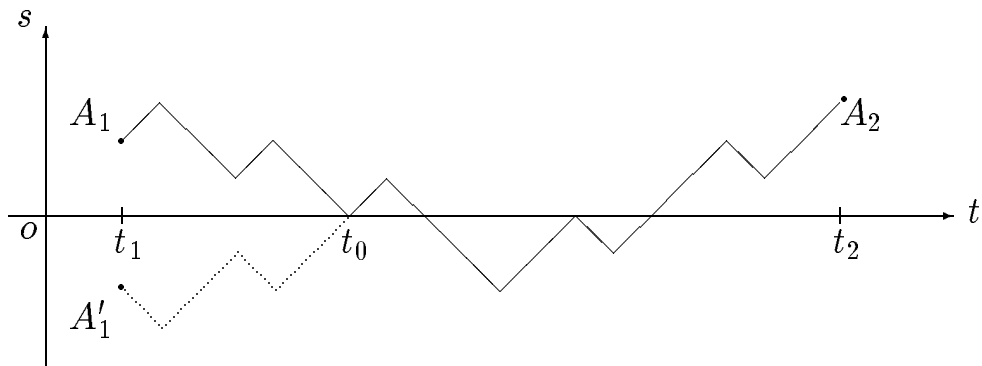
(для наглядности можно соединить последовательно точки $(t, s(t))$ траектории $s(t)$, $t = 0, 1, \dots$ процесса $S(t)$, представив траекторию в виде ломаной линии). Напомним, что дискретный аналог $X_n(t)$ винеровского процесса $X(t)$ получается из процесса $S(t)$ заменой t на tn с $t = k/n$ и последующим масштабированием его траектории: $X_n(t) = S(tn)\sigma/\sqrt{n}$.

Рассмотрим все траектории, проходящие через две заданные точки $A_1 = (t_1, s_1 = s(t_1))$ и $A_2 = (t_2, s_2 = s(t_2))$, $t_1 < t_2$, и назовем участок траектории между этими точками *путем из точки A_1 в точку A_2* . Эти пути обладают тем замечательным свойством, что у них число p слагаемых X_i , $i = t_1 + 1, \dots, t_2$, принявших значение $+1$, одинаково и равно $(t_2 - t_1 + s_1 - s_2)/2$, если, конечно, последнее число целое, – в противном случае не существует траектории, проходящей через эти точки. Действительно, если обозначить q число отрицательных (-1) слагаемых, то $p + q = t_2 - t_1$ и $p - q = s_2 - s_1$, что и дает указанную формулу для расчета p . Из этих же соотношений легко получить формулу для общего числа N путей, проходящих через точки A_1 и A_2 ; очевидно, $N = C_{p+q}^p = C_{p+q}^q$.

Следующие две леммы указывают простой метод для расчета числа путей из начала координат в точку (k, m) , которые расположены ниже уровня m .

Лемма 15.2 (*принцип отражения*). Число путей из точки $A_1 = (t_1, s_1)$, $s_1 > 0$, в точку $A_2 = (t_2, s_2)$, $s_2 > 0$, которые касаются или пересекают ось t хотя бы один раз, равно числу всевозможных путей из точки $A'_1 = (t_1, -s_1)$ в точку A_2 .

Доказательство. Между множеством путей из A_1 в A_2 , удовлетворяющих условию леммы, и множеством всевозможных путей из A'_1 в A_2 можно установить взаимно однозначное соответствие, используя следующий *принцип отражения* (см. рисунок).



Путь из A_1 в A_2 должен по крайней мере один раз коснуться оси времени t ; пусть $t_0 > t_1$ – абсцисса первого касания (напомним, $s_1 = s(t_1) > 0$). Такому пути с ординатами

$$s(t_1) > 0, s(t_1 + 1) > 0, \dots, s(t_0 - 1) > 0, s(t_0) = 0, \\ s(t_0 + 1), \dots, s(t_2)$$

сопоставим путь с ординатами

$$-s(t_1) < 0, -s(t_1 + 1) < 0, \dots, -s(t_0 - 1) < 0, s(t_0) = 0, \\ s(t_0 + 1), \dots, s(t_2),$$

который принадлежит второму множеству, то есть отразим участок пути из A_1 в A_2 на промежутке $[t_1, t_0]$ зеркально относительно оси t , а дальше оставим путь без изменения. Легко убедиться, что это взаимно однозначное соответствие – каждому пути второго множества отвечает такой же „зеркальный” образ из первого множества, ибо пути из второго множества обязательно пересекают ось t , так

как $-s(t_1) < 0$, а $s(t_2) > 0$. Таким образом, оба множества содержат одинаковое число путей.

Рассмотрим теперь пути из начала координат $(0, 0)$ в точку (k, m) с $m > 0$. Общее число таких путей, как было показано выше, $N_{k,m} = C_k^p$, где $p = (m + k)/2$, если оно целое, в противном случае $N_{k,m} = 0$.

Лемма 15.3. *Число путей из начала координат в точку (k, m) , $m > 0$, у которых $s(t) > 0$ при всех $t = 1, 2, \dots, k$, равно*

$$N_{k-1,m-1} - N_{k-1,m+1} = \frac{m}{k} N_{k,m}.$$

Доказательство. Любой путь из $(0, 0)$ в (k, m) , удовлетворяющий условию леммы, проходит через точку $(1, 1)$. Следовательно, если вычесть из общего числа путей $N_{k-1,m-1}$ из точки $(1, 1)$ в точку (k, m) число M путей, которые соединяют эти точки, касаясь или пересекая ось t , то получим искомое число путей из $(0, 0)$ в (k, m) , лежащих в первом квадранте. В силу леммы 15.2 M равно общему числу путей из точки $(1, -1)$ в точку (k, m) , поэтому $M = N_{k-1,m+1}$.

Лемма 15.4. *Число путей из начала координат в точку (k, m) , $m > 0$, у которых $s(t) < m$ при всех $t = 1, 2, \dots, k - 1$, равно*

$$\frac{1}{2} (N_{k-1,m-1} - N_{k-1,m+1}) = \frac{m}{2k} N_{k,m}. \quad (5)$$

Доказательство. Для того, чтобы достигнуть точки (k, m) , оставаясь ниже уровня m , путь должен пройти точку $(k - 1, m - 1)$, после чего он может попасть или в точку $(k, m - 2)$, или в (k, m) . Следовательно, искомое число путей равно половине числа N путей из начала координат в точку $(k - 1, m - 1)$, расположенных ниже уровня m . Простые соображения симметрии убеждают нас, что N равно числу путей из $(1, 1)$ в (k, m) , расположенных в первом квадранте, — для этого достаточно поместить начало координат в точку (k, m) и трактовать уровень m как ось абсцисс. Используя формулу для расчета N , которая была получена в лемме 15.3, получаем (5).

Последняя лемма устанавливает распределение момента $\kappa = \min\{k : S(k) \geq m\}$ первого выхода на уровень m дискретного процесса $S(t) = \sum_1^t X_i$, $t = 0, 1, \dots$. Действительно, формула (5) вычисляет количество траекторий определенного вида, связанного с их

положением в момент $t = k-1$. Мы можем сгруппировать бесконечное множество траекторий процесса $S(t)$ в 2^{k-1} равновероятных класса, в соответствии с различиями в путях, соединяющих начало координат с достижимыми точками, абсцисса которых равна $k-1$. Итак, справедлива

Лемма 15.5. *Вероятность того, что дискретный процесс $S(t)$ впервые достигнет уровня m в момент времени $t = k$ равна*

$$\frac{m}{2^k} \binom{k}{m},$$

где k и m должны иметь одинаковую четность, $m \leq k$ и

$$\binom{k}{m} = C_k^{(k+m)/2}.$$

Теперь обратимся к дискретному аналогу $X_n(t)$ винеровского процесса $X(t)$ и моменту $\tau_n = \min\{t : X_n(t) \geq h\}$ первого выхода процесса $X_n(t)$ на уровень $h > 0$. Перепишем определение рассмотренного выше момента κ в следующем виде:

$$\frac{\kappa}{n} = \min \left\{ t : \frac{\sigma}{\sqrt{n}} S(nt) \geq \frac{m\sigma}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Отсюда немедленно вытекает, что функция плотности случайной величины τ_n

$$g_n(t) = P(\tau_n = t) = \frac{m}{2^k} \binom{k}{m} C_k^{(k+m)/2},$$

где $m = h\sqrt{n}/\sigma$, $k = nt$ с очевидными ограничениями на возможные значения переменной t и параметров h и σ .

Изучим асимптотическое поведение $g_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном h . Легко понять, что тем самым мы устанавливаем асимптотическое поведение вероятности

$$G(t + 1/n) - G(t) = P(t \leq \tau < t + 1/n) \sim g(t) \frac{1}{n}$$

при $n \rightarrow \infty$, и это позволит нам найти функцию плотности $g(t)$ момента τ первого достижения уровня h винеровским процессом $X(t)$.

Предложение 15.3. Если $n \rightarrow \infty$, то

$$g_n(t) \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi}\sigma t^{3/2}n} \exp\left\{-\frac{h^2}{2\sigma^2 t}\right\}.$$

Доказательство. Нам предстоит исследовать асимптотику выражения

$$\frac{m}{2^k k} \frac{k!}{\left(\frac{k+m}{2}\right)! \left(\frac{k-m}{2}\right)!},$$

в котором $k = nt$, $m = h\sqrt{n}/\sigma$ и $n \rightarrow \infty$.

Поскольку k , $k+m$ и $k-m$ с ростом n стремятся к бесконечности, то, как мы это делали раньше при доказательстве теоремы Муавра–Лапласа, воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n} (1 + O(1/n))$$

и представим функцию плотности в асимптотическом виде

$$g_n(t) \sim \frac{m}{2^k k \sqrt{2\pi}}.$$

$$\frac{k^{k+1/2} e^{-k} 2^{(k+m)/2+1/2+(k-m)/2+1/2}}{(k+m)^{(k+m)/2+1/2} (k-m)^{(k-m)/2+1/2} e^{-(k+m)/2} e^{-(k-m)/2}} =$$

$$\frac{m}{\sqrt{2\pi} k^{3/2}} \left(1 + \frac{m}{k}\right)^{-\frac{k+m}{2}-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{m}{k}\right)^{-\frac{k-m}{2}-\frac{1}{2}}$$

Поскольку $m/k \rightarrow 0$, то степени $1/2$ не влияют на асимптотику, и простые алгебраические преобразования дают

$$g_n(t) \sim \frac{m}{\sqrt{2\pi} k^{3/2}} \left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right)^{-\frac{k}{2}} \left(1 + \frac{m}{k}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(1 - \frac{m}{k}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Если теперь подставить в правую часть $m = h\sqrt{n}/\sigma$, $k = nt$ и воспользоваться замечательным пределом, определяющим число e , то получим окончательный результат

$$g_n(t) \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi}\sigma t^{3/2}n} \exp\left\{-\frac{h^2}{2t\sigma^2}\right\}.$$

Итак, мы установили, что $\tau_n \Rightarrow \tau$, функция плотности которого имеет вид

$$g(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}, \quad a = h/\sigma,$$

а функция распределения $G(t)$ выражается через функцию распределения $\Phi(\cdot)$ стандартного нормального закона $\mathcal{N}(0, 1)$ соотношением

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{x\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2x}\right\} dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Однако, это совсем не означает, что мы получили функцию распределения момента первого перескока винеровским процессом заданного уровня. В нашем доказательстве имеется огромная „дыра“ – мы не располагаем условиями, при которых сходимость последовательности конечномерных распределений процесса (слабая сходимость) влечет сходимость распределений функционалов от этого процесса. К счастью, в нашем случае с дискретным аналогом винеровского процесса все обстоит благополучно.

Следует отметить, что распределение первого перескока играет важную роль в моделях теории надежности, когда отказ системы вызывается усталостными разрушениями, вызванными хаотическими появлениями „пиковых“ нагрузок, которые возникают во времени подобно локальным максимумам траектории винеровского процесса.