

Характеристические функции являются весьма мощным инструментом для построения вероятностных моделей и позволяют без особых технических сложностей получить известные нам законы теории вероятностей, значительно расширяя их область действия. Сейчас мы получим более сильный, чем П.Л. Чебышева, закон больших чисел и обобщим предельную теорему Муавра–Лапласа на суммы независимых случайных величин с произвольным общим законом распределения.

Теорема 14.1 (закон больших чисел Хинчина). Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием $\mu = \mathbf{E}X_1$. Тогда

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \mu.$$

Доказательство. В силу конечности первого момента характеристическая функция каждого слагаемого допускает асимптотическое представление (предложение 12.1, п. 5⁰) $\varphi_{X_k}(t) = 1 + it\mu + o(t)$. Из свойств 2⁰ и 3⁰ предложения 12.1 следует, что

$$\varphi_{\bar{X}_n}(t) = \left(1 + it\frac{\mu}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

Очевидно, $\varphi_{\bar{X}_n}(t) \rightarrow \varphi(t) = e^{it\mu}$, функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна в точке $t = 0$ и соответствует характеристической функции константы μ – случайной величине, принимающей значение μ с вероятностью единица.

Таким образом, в силу теоремы непрерывности 13.1 $\bar{X}_n \Rightarrow \mu$, а поскольку слабая сходимость к постоянной влечет сходимость по вероятности (предложение 11.2), то $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Наиболее сильный результат в законах больших чисел принадлежит А.Н.Колмогорову, который доказал, что при существовании математического ожидания $\bar{X}_n \xrightarrow{n.n.} \mu$. Конечно, нам, как всегда, не хватает времени доказать что-нибудь стоящее, и если в §11 я вводил

понятие сходимости почти наверное, то это делалось только для того, чтобы сейчас хотя бы упомянуть об усиленном законе больших чисел А.Н.Колмогорова.

А что будет, если отказаться от условия конечности или существования среднего значения $\mathbf{E}X_1$? Следующий пример показывает, что сходимости к постоянной величине не будет.

Пример (нарушения закона больших чисел.) Пусть X_1, \dots, X_n независимы и одинаково распределены по закону Коши $C(0, 1)$. Характеристическая функция стандартного ($a = 0, b = 1$) распределения Коши $\varphi(t) = \exp\{-|t|\}$, характеристическая функция суммы $S_n = \sum_1^n X_k$ равна $\varphi^n(t) = \exp\{-n|t|\}$, наконец, характеристическая функция нормированной суммы $\bar{X}_n = S_n/n$ равна $\varphi^n(t/n) = \exp\{-|t|\}$, и мы снова получили то же самое стандартное распределение Коши! Конечно, внутри каждого из нас теплилась надежда, что \bar{X}_n будет сходиться при $n \rightarrow \infty$ к моде распределения Коши $\text{mod}(X_1) = 0$, но, увы, законы природы (математики) неумолимы и, вычисляя арифметическое среднее любого количества реализаций случайных величин с распределением Коши, мы также будем (в среднем) далеки от моды, как и на первом шаге нашего статистического эксперимента.

Изучим теперь более подробно асимптотическое ($n \rightarrow \infty$) распределение $\sum_1^n X_k$.

Теорема 14.2 (центральная предельная теорема). Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечными математическим ожиданием $\mathbf{E}X_1 = \mu$ и дисперсией $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$. Тогда при любом $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sum_1^n X_k - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} < x \right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Доказательство. Рассуждения те же, что и при выводе закона больших чисел, но используется существование двух моментов у X_k . В силу п. 5⁰ предложения 12.1 характеристическая функция нормированной случайной величины $Y_k = (X_k - \mu)/\sigma$, у которой $\mathbf{E}Y_k = 0$ и $\mathbf{D}Y_k = 1$, допускает асимптотическое ($t \rightarrow 0$) представление

$$\varphi_{Y_k}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right).$$

Теперь, в силу п. 2⁰ предложения 12.1, характеристическая функция нормированной суммы

$$\bar{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n Y_k = \frac{(\sum_1^n X_k - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}},$$

имеет асимптотику

$$\varphi_{\bar{S}_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2)\right)^n.$$

Очевидно,

$$\varphi_{\bar{S}_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2},$$

если $n \rightarrow \infty$, а это, как нам известно из §12, есть характеристическая функция стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. Поскольку предельная нормальная функция $\Phi(x)$ непрерывна на всем \mathbb{R} , то функция распределения \bar{S}_n сходится к $\Phi(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Существуют обширнейшие исследования по распределениям сумм случайных величин, в которых центральная предельная теорема обобщается на случай „слабо зависимых“ или разно распределенных, но обладающих одинаковым порядком малости, случайных величин; рассматриваются суммы случайных векторов и суммы случайных элементов, принимающих значения в абстрактных пространствах, и т.д., и т.п., так что не перестаешь удивляться, как это можно что-то еще сделать в области того, где, кажется, всё уже сделано. Мы не будем углубляться в эту обширнейшую тематику и займемся более прикладными вопросами – продолжим построение вероятностных моделей, математической основой которых служат предельные теоремы теории вероятностей.

Вероятностные модели роста. Условимся употреблять терминологию, связанную с биологическими исследованиями; о приложениях к другим областям естествознания поговорим ниже, после вывода основного уравнения модели.

Предположим, что мы посадили с вами маленькое деревце (саженец) высоты x_0 , и во все последующие годы производим замеры x_1, x_2, \dots высоты растущего дерева. Нас интересуют прогноз высоты дерева по истечении n лет. Естественно, на ежегодный прирост высоты действует огромное количество природных факторов: температура, осадки, солнечное освещение, плодородие почвы и т.п., поэтому мы, очевидно, имеем дело со стохастическим прогнозом, который

формулируется, примерно, как следующее заключение: „Через 60 лет с вероятностью 0,9 высота дерева будет не меньше 15 метров.” Конечно, такой прогноз, как и в случае однократного подбрасывания монеты, нельзя применить к одному посаженному дереву, но его можно использовать в прогнозе „зрелости” лесной посадки, состоящей из большого числа деревьев, и тогда наше заключение будет относиться приблизительно к 90% саженцев.

Итак, мы должны трактовать замеры x_1, x_2, \dots в терминах реализаций компонент последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots и попытаться формализовать в математических терминах причину „разброса” в значениях ежегодных приращений $\Delta_k = X_k - X_{k-1}$ высоты дерева. Естественно предположить, что прирост Δ_k вызван суммарным действием всех тех причин роста, о которых мы говорили выше, то есть действием некоторого „импульса” ξ_k . Между Δ_k и ξ_k существует приближенная линейная связь $\Delta_k = \alpha_k \xi_k$, где α_k зависит от высоты X_{k-1} дерева, которой оно достигло по истечении k лет. Положим $\alpha_k = g(X_{k-1})$ с естественным условием неотрицательности и непрерывности функции $g(\cdot)$. Таким образом, мы приходим к рекуррентным соотношениям, которые описывают ежегодный прирост высоты дерева,

$$X_k - X_{k-1} = \xi_k g(X_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Нам осталось только сделать некоторые предположения, касающиеся распределения случайных величин ξ_k , $k = 1, 2, \dots$. Будем считать, что эти случайные величины неотрицательны, независимы, одинаково распределены и обладают конечными моментами второго порядка: средним значением $a = \mathbf{E}\xi_k$ и дисперсией $b^2 = \mathbf{D}\xi_k$.

Напомним, что мы интересуемся распределением случайной величины X_n , реализация x_n которой указывает размер конкретного дерева по истечении n лет. Перепишем первые n рекуррентных соотношений (1) в виде

$$\xi_k = \frac{X_k - X_{k-1}}{g(X_{k-1})}, \quad k = 1, \dots, n$$

и просуммируем левые и правые части этих равенств. В результате получим

$$\sum_1^n \xi_k = \sum_1^n \frac{X_k - X_{k-1}}{g(X_{k-1})}.$$

Если каждый импульс вызывает незначительный прирост дерева, то есть все $\Delta_k = X_k - X_{k-1}$ малы, то, трактуя правую часть последнего равенства как интегральную сумму, получаем приближенное равенство

$$\sum_1^n \xi_k = \int_{x_0}^X \frac{dt}{g(t)}, \quad (2)$$

где $X = X_n$ – окончательный размер дерева.

Так как функция $g(x)$ положительна, то интеграл в правой части (2) представляет собой некоторую монотонно возрастающую функцию $h(X)$. Применение центральной предельной теоремы 14.2 к левой части (2) приводит к утверждению: по истечении достаточно большого срока после посадки дерева ($n \gg 1$) распределение его высоты X определяется соотношением $h(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, где $\mu = na$, $\sigma^2 = nb^2$. В силу монотонности функции $h(\cdot)$

$$F(x) = P(X < x) = P(h(X) < h(x)) = \Phi \left(\frac{h(x) - \mu}{\sigma} \right).$$

Осталось решить проблему с выбором функции $g(\cdot)$. Если постулировать, что прирост высоты дерева пропорционален достигнутой высоте, то есть положить $g(t) = t$, а именно такое предположение наиболее часто используется в моделях роста, то мы придем к следующему распределению случайной величины X .

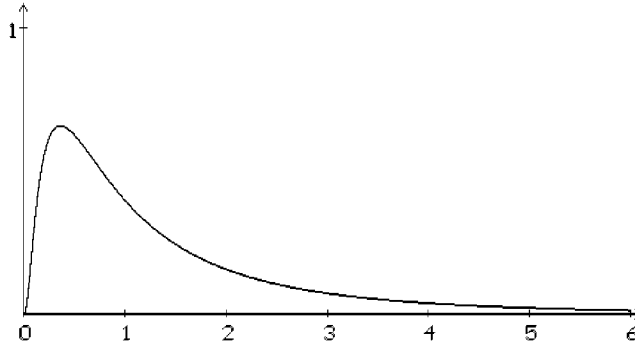
Логарифмически-нормальное распределение $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$. При $g(t) = t$ интеграл в правой части (2) с точностью до постоянного слагаемого $-\ln x_0$ равен $\ln X$, так что $\ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, и функция распределения X

$$F(x) = \Phi \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right), \quad x > 0;$$

функция плотности

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi} x} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Это унимодальное, резко асимметричное ($\gamma_1 > 0$) распределение, график плотности которого имеет следующий вид:



Конечно, в практических приложениях целесообразнее оперировать не с X , а с его натуральным логарифмом $Y = \ln X$, после чего производить все расчеты, используя модель нормального распределения.

Логарифмически-нормальный закон носит достаточно универсальный характер. Этому распределению подчиняется размер трещины в испытуемом образце материала, который подвергается циклическим нагрузениям, „на изгиб” – вы можете сами без особых фантазийных усилий пересказать наши построения с высотой дерева в терминах размера трещины. Аналогичные рассуждения могут быть также применены в изучении роста доходов у отдельных лиц достаточно однородной человеческой популяции. Проводимые в этом направлении статистические исследования указывают на хорошее согласие с логарифмически-нормальным распределением достаточно низких доходов, в то время как для умеренных и высоких доходов более подходящим является распределение Парето.

В рамках построенной нами модели роста часто возникает задача, которую можно трактовать как некоторую альтернативу к проблеме вывода распределения размера, достигнутого к определенному сроку, „растущим” объектом исследования. Пусть фиксирован некоторый уровень x размера (дерева, трещины, дохода) и нас интересует распределение момента времени (номера цикла), на котором этот размер будет достигнут. Удивительно, что в рамках нашей модели это распределение не зависит от выбора положительной функции $g(\cdot)$, и получить его можно путем следующих тривиальных рассуждений.

Распределение Бирнбаума–Сондерса $BS(\lambda, \theta)$. Пусть τ – случайная величина, реализующая момент достижения заданного раз-

мера x . Тогда событие $\tau > n$ эквивалентно событию $X_n < x$ – к моменту времени n высота дерева еще не достигла уровня x . Итак,

$$P(\tau > n) = P(X_n < x) = P(h(X_n) < h(x)) = \Phi\left(\frac{h(x) - na}{b\sqrt{n}}\right). \quad (3)$$

Заменим теперь n на „непрерывную” переменную t и введем новые параметры λ и θ , определив их уравнениями $\lambda\sqrt{\theta} = h(x)/b$, $\lambda/\sqrt{\theta} = a/b$. Цепочка равенств (3) позволяет нам записать распределение случайного момента времени τ , в который дерево (трещина, доход,) достигнет заданного уровня x :

$$F(t) = P(\tau < t) = 1 - \Phi\left(\lambda\left(\sqrt{\frac{\theta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\theta}}\right)\right), \quad t > 0.$$

Это унимодальное распределение, которое называется *распределением Бирнбаума–Сондерса*, и мы будем обозначать его $BS(\lambda, \theta)$. График плотности BS -распределения (я, надеюсь, вы достаточно образованы в области математического анализа, чтобы найти производную от $F(t)$) очень похож на функцию плотности гамма-распределения. BS -распределение играет большую роль при расчетах надежности объектов, долговечность которых определяется развитием трещин, приводящих к гибели объекта.

Рассмотрим еще одно распределение, часто используемое в практических расчетах надежности сложных систем.

Распределение Вейбулла $W(\lambda, \theta)$ (модель слабого звена). Имеется цепь, состоящая из большого числа n звеньев. Допустим, что прочности x_1, \dots, x_n отдельных звеньев можно трактовать как реализации n независимых, одинаково распределенных случайных величин X_1, \dots, X_n . На оба конца цепи подается равномерно возрастающая нагрузка, и фиксируется напряжение, при котором происходит разрыв цепи. Очевидно это напряжение равно прочности наислабейшего звена цепи, поэтому его можно трактовать как реализацию случайной величины

$$X = \min_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

Если $F(x)$ – функция распределения каждого X_k , $k = 1, \dots, n$, то функция распределения X определяется посредством следующих расчетов, в которых существенно используется независимость

$X_1, \dots, X_n :$

$$G_n(x) = P(X < x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - P(X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x) = \\ 1 - \prod_{k=1}^n P(X_k \geq x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

При больших n естественно вместо $G_n(x)$ использовать ее асимптотику. Однако при каждом фиксированном $x (> 0)$ вероятность $G_n(x) \rightarrow 1$, если $n \rightarrow \infty$, и поэтому мы должны провести нормировку X по аналогии с тем, как это делалось в центральной предельной теореме, чтобы распределение не вырождалось, когда $n \rightarrow \infty$. Понятно также, что X по вероятности сходится к нулю, поэтому нормировку X следует производить домножением на некоторую растущую функцию от n . При этом нам не избежать условий на поведение функции распределения $F(x)$ при $x \rightarrow 0+$ – допустим, что $F(x) \sim ax^\lambda$, где a и λ – неотрицательные числа (удивительно, но все изученные нами распределения, сосредоточенные на положительной полуоси, удовлетворяют этому условию).

Функция распределения $W(x)$ нормированной случайной величины $Y = n^{1/\lambda}X$ не вырождается с ростом n , и предельное распределение находится с помощью следующих выкладок:

$$W(x) = P(Y < x) = P\left(X < \frac{x}{n^{1/\lambda}}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n^{1/\lambda}}\right)\right)^n \sim \\ 1 - \left(1 - a\left(\frac{x}{n^{1/\lambda}}\right)^\lambda\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{ax^\lambda}{n}\right)^n \sim 1 - e^{-ax^\lambda}.$$

Заменяя параметр a на параметр θ , определяемый уравнением $a = \theta^{-\lambda}$, получаем *распределение Вейбулла* $W(\lambda, \theta)$ с функцией распределения

$$W(x | \lambda, \theta) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\lambda\right\}, \quad x > 0, \lambda, \theta > 0.$$

Это также унимодальное распределение, график функции плотности которого, „на глаз” не отличим от графика функции плотности гамма-распределения. Вейбулловскому распределению обычно следуют долговечности систем, состоящих из большого числа однотипных элементов (например, плата компьютера), отказ одного из которых (наислабейшего) приводит к отказу системы.