

§13. Характеристические функции.

Критерий слабой сходимости

Лекция 20–21

Следующая теорема дает удобный критерий слабой сходимости распределений случайных величин.

Теорема 13.1. Пусть $\{\varphi_n, n \geq 1\}$ – последовательность характеристических функций и $\{F_n, n \geq 1\}$ – последовательность соответствующих функций распределений. Если при любом фиксированном $t \in \mathbf{R}$ последовательность характеристических функций сходится к некоторой непрерывной в точке $t = 0$ функции $\varphi(t)$, то $\varphi(\cdot)$ есть характеристическая функция некоторой случайной величины X с функцией распределения $F(\cdot)$ и $F_n \Rightarrow F$. Обратно, если $F_n \Rightarrow F$ и $F(\cdot)$ есть функция распределения, то $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ при любом $t \in \mathbf{R}$ и $\varphi(\cdot)$ – характеристическая функция случайной величины X с функцией распределения $F(\cdot)$.

Доказательство этой теоремы (в монографиях по теории вероятностей она обычно называется *теоремой непрерывности* для последовательностей характеристических функций) основано на ряде вспомогательных утверждений о слабой сходимости функций распределений.

Лемма 13.1. Всякая последовательность функций распределения $\{F_n, n \geq 1\}$ содержит подпоследовательность $\{F_{n_k}, k \geq 1\}$, слабо сходящуюся к некоторой ограниченной неубывающей и непрерывной слева функции $F(\cdot)$, т.е. $F_{n_k}(x) \rightarrow F(x)$ при $k \rightarrow \infty$ в любой точке x непрерывности функции $F(\cdot)$.

Замечание 13.1. Если последовательность $\{F_n(x), n \geq 1\}$ сходится в каждой точке x , то предельная функция $F(x)$, $x \rightarrow \mathbf{R}$ может и не быть функцией распределения, хотя, очевидно, $F(\cdot)$ не убывает и ее изменение на \mathbf{R} : $\text{var}F = \sup_x F(x) - \inf_x F(x) \leq 1$, ибо таковы функции распределения $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$. Пример такой последовательности дают функции $F_n(\cdot)$ равномерных распределений на отрезках $[n; n + 1]$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $F_n(x) = 0$ при $x < n$, то для любого $x \in \mathbf{R}$ существует такое N (достаточно взять N больше x), что $F_n(x) = 0$ для всех $n \geq N$. Следовательно, $F_n(x) \rightarrow F(x) \equiv 0$ и $\text{var}F = 0$.

Доказательство леммы 11.2. Начнем с выбора подпоследовательности $\{F_{n_k}, k \geq 1\}$, которая сходится слабо к некоторому пределу F , обладающему указанными свойствами.

Пусть $\mathcal{D} = \{r_n, n \geq 1\}$ – счетное всюду плотное в \mathbb{R} множество, например, множество рациональных чисел. Числовая последовательность $\{F_n(r_1), n \geq 1\}$ ограничена, и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность $\{F_{1n}(r_1), n \geq 1\}$. Пусть $F_1(r_1)$ – предел этой подпоследовательности. Рассмотрим теперь последовательность чисел $\{F_{1n}(r_2), n \geq 1\}$; она также содержит сходящуюся подпоследовательность $\{F_{2n}(r_2), n \geq 1\}$ с некоторым пределом $F_2(r_2)$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{2n}(r_1) = F_1(r_1),$$

ибо $\{F_{2n}(r_1), n \geq 1\}$ – подпоследовательность сходящейся к $F_1(r_1)$ последовательности $\{F_{1n}(r_1), n \geq 1\}$. Точно так же последовательность $\{F_{2n}(r_3), n \geq 1\}$ содержит подпоследовательность $\{F_{3n}(r_3), n \geq 1\}$ с пределом $F_3(r_3)$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{3n}(r_2) = F_2(r_2), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{3n}(r_1) = F_1(r_1),$$

ибо $\{F_{3n}(r_1), n \geq 1\} \subseteq \{F_{2n}(r_1), n \geq 1\} \subseteq \{F_{1n}(r_1), n \geq 1\}$ – индексы каждой последующей подпоследовательности выбирались из множества индексов предыдущей. Продолжая этот процесс, мы убеждаемся, что для любого $k \geq 1$ число $F_k(r_k)$ есть общий предел всех последовательностей $\{F_{jn}(r_k), n \geq 1\}$, $j = k, k+1, \dots$, причем каждая последующая последовательность есть подпоследовательность предыдущей.

Рассмотрим диагональную последовательность $\{F_{nn}(r_k), n \geq 1\}$. За исключением первых $k-1$ членов ее последующие члены выбираются по одному из рассмотренных выше последовательностей, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{nn}(r_k) = F_k(r_k).$$

Тем самым для всех $x \in \mathcal{D}$ определена неубывающая функция $F_0(x)$, равная $F_k(r_k)$, если $x = r_k$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{nn}(x) = F_0(x), \forall x \in \mathcal{D}.$$

Функция $F_0(\cdot)$ ограничена и не убывает на \mathcal{D} , ибо этими свойствами обладает каждый член последовательности $\{F_{nn}, n \geq 1\}$. Теперь определим $F(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}$, полагая

$$F(x) = \sup_{r < x, r \in \mathcal{D}} F_0(r).$$

Покажем, что $F(\cdot)$ – искомая функция, то есть она (1) не убывает, (2) непрерывна слева и (3) $F_{nn}(x) \rightarrow F(x)$ в каждой точке x непрерывности функции F .

(1) Монотонность F следует из аналогичного свойства F_0 : если $x \leq y$, то

$$F(x) = \sup_{r < x} F_0(r) \leq \sup_{r < y} F_0(r) = F(y).$$

(2) Непрерывность слева функции F в любой точке $x \in \mathbb{R}$ вытекает из определения точной верхней грани и монотонности функций F и F_0 . Требуется доказать, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ существует такое $y_0 = y_0(\varepsilon, x) < x$, что $0 \leq F(x) - F(y) \leq \varepsilon$ при любом $y \in (y_0, x)$. По определению супремума существует такая возрастающая (супремальная) последовательность $\{r_k, k \geq 1\} \subset \mathcal{D}$, что $r_k < x$ при $\forall k = 1, 2, \dots$ и

$$\lim_k \uparrow F_0(r_k) = F(x).$$

Следовательно, существует такое $K = K(\varepsilon)$, что при $\forall k \geq K$ выполняется неравенство $0 \leq F(x) - F_0(r_k) < \varepsilon$. Но для любого $y \geq r_K$ имеет место неравенство $F_0(r_K) \leq \sup_{r < y} F_0(r) = F(y)$, и поэтому $0 \leq F(x) - F(y) \leq \varepsilon$, каково бы ни было $y \geq r_K = y_0$. Итак, F непрерывна слева.

(3) Покажем теперь, что $F_{nn} \Rightarrow F$, то есть в любой фиксированной точке x непрерывности функции $F(\cdot)$, начиная с некоторого n , выполняется неравенство $|F_{nn}(x) - F(x)| < \varepsilon$, каково бы ни было наперед заданное число $\varepsilon > 0$.

Начнем с того, что в силу только что установленной непрерывности слева функции $F(\cdot)$ по заданному ε всегда можно подобрать такие $x', x'' \in \mathbb{R}$ и $r', r'' \in \mathcal{D}$, что $x' < r' < x < r'' < x''$, и при этом $0 < F(x'') - F(x) < \varepsilon/2$ и $0 < F(x) - F(x') < \varepsilon/2$.

Так как $F_{nn}(r) \rightarrow F_0(r)$ при $\forall r \in \mathbf{D}$, то, начиная с некоторого $n > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|F_{nn}(r) - F_0(r)| < \varepsilon/2$, и поэтому $F_{nn}(x) - F(x) \leq F_{nn}(r'') - F(x) = [F_{nn}(r'') - F_0(r'')] + [F_0(r'') - F(x)] \leq \varepsilon/2 + F_0(r'') - F(x)$, а также $F(x) - F_{nn}(x) \leq F(x) - F_{nn}(r') \leq [F(x) - F_0(r')] + [F_0(r') - F_{nn}(r')] \leq F(x) - F_0(r') + \varepsilon/2$. Для доказательства сходимости $F_{nn}(x)$ к $F(x)$ достаточно показать, что $F_0(r'') \leq F(x'')$, а $F_0(r') \geq F(x')$, а затем воспользоваться неравенством $F(x'') - F(x') < \varepsilon/2$. Но это почти очевидно, поскольку выпол-

няются строгие неравенства $x' < r'$ и $r'' < x''$. Действительно,

$$F_0(r'') \leq \sup_{r < x''} F_0(r) = F(x'')$$

и, аналогично,

$$F_0(r') \geq \sup_{r < r'} F_0(r) = F(r') \geq F(x').$$

Следовательно, $F_0(r'') - F(x) \leq F(x'') - F(x) \leq \varepsilon/2$ и $F(x) - F_0(r') \leq F(x) - F(x') \leq \varepsilon/2$, откуда $-\varepsilon \leq F_{nn}(x) - F(x) \leq \varepsilon$.

Условимся, начиная с этого момента, записывать интеграл Лебега

$$\int_B g(x) dP(x), \quad B \in \mathfrak{B}$$

по вероятностной мере P на борелевской прямой $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ как

$$\int_B g(x) dF(x),$$

используя тем самым вместо P функцию распределения F , которая, в силу теоремы 4.1, однозначно определяет распределение вероятностей P .

Лемма 13.2. *Для того, чтобы последовательность функций распределений $\{F_n, n \geq 1\}$ слабо сходилась к некоторой функции распределения $F(\cdot)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной и ограниченной функции $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x). \quad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Оценим разность

$$\Delta_n = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) \right|$$

и покажем, что Δ_n можно сделать сколь угодно малым, выбирая достаточно большое n , если $F_n \Rightarrow F$.

Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$ и выберем на оси \mathbb{R} такие точки a и b , чтобы $F(x)$ была непрерывной в a и b и чтобы $F(a) < \varepsilon$ и $1 - F(b) < \varepsilon$. Поскольку $F_n \Rightarrow F$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a) = F(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(b) = F(b)$$

и, следовательно,

$$F_n(a) \leq F(a) + \varepsilon, \quad F_n(b) \geq F(b) - \varepsilon, \quad (2)$$

начиная с некоторого $n > N(\varepsilon)$.

Разобьем каждый из интегралов, участвующих в определении Δ_n , на сумму трех интегралов по промежуткам $[-\infty; a]$, $[a; b]$, $[b; +\infty]$. Тогда $\Delta_n \leq \Delta_{1n} + \Delta_{2n} + \Delta_{3n}$, где

$$\Delta_{1n} = \left| \int_{-\infty}^a g dF - \int_{-\infty}^a g dF_n \right|, \quad \Delta_{2n} = \left| \int_a^b g dF - \int_a^b g dF_n \right|,$$

$$\Delta_{3n} = \left| \int_b^{\infty} g dF - \int_b^{\infty} g dF_n \right|.$$

Положим $M = \sup_x |g(x)| < \infty$ (напомним, функция g ограничена) и оценим Δ_{1n} и Δ_{3n} . Используя (2), получаем

$$\Delta_{1n} \leq \int_{-\infty}^a |g| dF + \int_{-\infty}^a |g| dF_n \leq M(F(a) + F_n(a)) \leq M(2F(a) + \varepsilon) \leq 3M\varepsilon,$$

$$\Delta_{3n} = \int_b^{\infty} |g| dF + \int_b^{\infty} |g| dF_n \leq M(1 - F(b) + 1 - F_n(b)) \leq 3M\varepsilon,$$

ибо $F(a) < \varepsilon$ и $1 - F(b) < \varepsilon$. Таким образом, Δ_{1n} и Δ_{3n} стремятся к нулю с ростом n . Покажем, что аналогичное заключение можно сделать относительно Δ_{2n} .

Разобьем отрезок $[a; b]$ на N частей точками x_1, \dots, x_{N-1} , выбрав их так, чтобы они оказались точками непрерывности $F(\cdot)$ (это возможно в силу известного свойства функции распределения: она имеет не более чем счетное множество скачков, и поэтому не может быть целого промежутка, состоящего из точек разрыва $F(\cdot)$). Итак, пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$.

Так как функция $g(\cdot)$ непрерывна на \mathbb{R} , то на конечном отрезке $[a; b]$ она равномерно непрерывна. Следовательно, при достаточно большом N разность $|g(x) - g(x_k)| < \varepsilon$ при $x_k \leq x < x_{k+1}$ и любом $k = 0, \dots, N$. Введем ступенчатую функцию $g_\varepsilon(x)$, положив ее равной $g(x_k)$, если $x \in [x_k; x_{k+1})$, $k = 0, \dots, N-1$, и обратимся к оценке Δ_{2n} . Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{2n} &= \left| \int_a^b (g - g_\varepsilon + g_\varepsilon) dF - \int_a^b (g - g_\varepsilon + g_\varepsilon) dF_n \right| \leq \\ & \left| \int_a^b (g - g_\varepsilon) dF \right| + \left| \int_a^b (g - g_\varepsilon) dF_n \right| + \left| \int_a^b g_\varepsilon dF - \int_a^b g_\varepsilon dF_n \right|. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в правой части стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, поскольку $|g - g_\varepsilon| < \varepsilon$ и $F_n(b) - F_n(a) \leq 1$, а для последнего слагаемого имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g_\varepsilon dF - \int_a^b g_\varepsilon dF_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dF(x) - \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dF_n(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k) \{ (F(x_{k+1}) - F(x_k)) - (F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k)) \} \right| \leq \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |g(x_k)| \{ |F(x_{k+1}) - F_n(x_{k+1})| + |F(x_k) - F_n(x_k)| \}. \end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$, поскольку N фиксировано, $|g(x)| \leq M$, а $F_n(x_k) \rightarrow F(x_k)$ при любом $k = 0, \dots, N$. Итак, Δ_{2n} сколь угодно мало и, следовательно, $\Delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Достаточность. Пусть выполняется (1). Для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки x непрерывности F рассмотрим непрерывную функцию $f_\varepsilon(t)$, принимающую значение 1 при $t < x$, значение 0, если $t > x + \varepsilon$, и меняющуюся линейно на $[x; x + \varepsilon]$. Так как

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_\varepsilon(t) dF_n(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dF_n(t),$$

то в силу (1)

$$\limsup_n F_n(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) dF(t) \leq \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} dF(t) = F(x + \varepsilon).$$

Аналогично, с помощью функции $f_\varepsilon^*(t) = f_\varepsilon(t + \varepsilon)$ получаем неравенство

$$F_n(x) \geq \int_{-\infty}^x f_\varepsilon^*(t) dF_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^*(t) dF_n(t),$$

откуда

$$\liminf_n F_n(x) \geq \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^*(t) dF(t) \geq F(x - \varepsilon).$$

Следовательно, $F(x - \varepsilon) \leq \liminf_n F_n(x) \leq \limsup_n F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$, а так как x — точка непрерывности F , то в силу произвольности ε имеем равенство

$$\liminf_n F_n(x) = \limsup_n F_n(x) = \lim_n F_n(x) = F(x).$$

Замечание 13.2. В большинстве монографий по теории вероятностей слабая сходимость распределений определяется соотношением (1) – именно таким образом можно распространить понятие слабой сходимости на векторные случайные величины (или случайные величины с абстрактным пространством их значений). Слабая сходимость распределений обозначается тем же символом $F_n \Rightarrow F$.

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы установить критерий слабой сходимости.

Доказательство теоремы непрерывности 13.1. Если $F_n \Rightarrow F$, то

$$\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \varphi(t)$$

(достаточно применить лемму 11.2 к ограниченной непрерывной функции $g(x) = e^{itx}$).

Пусть теперь последовательность характеристических функций $\{\varphi_n, n \geq 1\}$ сходится к некоторой непрерывной в точке $t = 0$ функции $\varphi(t)$, и $\{F_n, n \geq 1\}$ – соответствующая последовательность функций распределения. Требуется доказать, что φ – характеристическая функция случайной величины с функцией распределения F и $F_n \Rightarrow F$.

В силу леммы 13.1 из последовательности $\{F_n, n \geq 1\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{F_{n_k}, k \geq 1\}$, слабо сходящуюся к некоторой неубывающей, непрерывной слева функции F , причем $0 \leq F(x) \leq 1$. Если $\text{var} F = 1$, то есть F – функция распределения, то (см.(1)) $\varphi_{n_k}(t) \rightarrow \varphi_0(t)$, $k \rightarrow \infty$, при любом $t \in \mathbb{R}$, где $\varphi_0(\cdot)$ – характеристическая функция, соответствующая функции распределения $F(\cdot)$. Так как последовательность $\{\varphi_n(t), n \geq 1\}$ сходится, то все ее подпоследовательности имеют один и тот же предел $\varphi(t)$, откуда $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ и $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – характеристическая функция. Наконец, в силу теоремы единственности 12.1 все подпоследовательности последовательности $\{F_n, n \geq 1\}$ имеют один и тот же слабый предел F , характеристическая функция которого есть φ , откуда $F_n \Rightarrow F$.

Итак, осталось показать, что $\text{var} F = 1$.

Допустим противное $\text{var} F = \delta < 1$. Так как $\varphi(\cdot)$ непрерывна в точке $t = 0$ и $\varphi(0) = 1$, ибо $\varphi_n(0) = 1$ при любом $n = 1, 2, \dots$, то для любого $\varepsilon \in (0; 1 - \delta)$ существует отрезок $[-\tau, \tau]$, на котором $|1 - \varphi(t)| < \varepsilon/2 = \varepsilon - \varepsilon/2 < 1 - \delta - \varepsilon/2$. Функция $\varphi(\cdot)$ интегрируема

на любом отрезке $[-\tau, \tau]$, так как она есть предел интегрируемых на $[-\tau, \tau]$ и ограниченных функций $\varphi_n(\cdot)$ (см. начало доказательства формулы обращения). Следовательно, (напомним, $|a| - |b| \leq |a - b|$)

$$1 - \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} (1 - \varphi(t)) dt \right| \leq \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |1 - \varphi(t)| dt < 1 - \delta - \varepsilon/2,$$

откуда,

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t) dt \right| > \delta + \varepsilon/2. \quad (3)$$

Неравенство (3) получено нами только из предположения непрерывности функции $\varphi(\cdot)$ в точке $t = 0$. Покажем теперь, что из сделанного нами предположения $\text{var}F = \delta < 1$, вытекает неравенство, противоположное (3). Пусть $F_{n_k} \Rightarrow F$, а соответствующая последовательность характеристических функций $\varphi_{n_k}(t) \rightarrow \varphi(t)$ при $\forall t \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t) dt \right| = \left| \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{n_k}(x) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x) = \int_{|x| > A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x) + \int_{|x| \leq A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x),$$

где A – некоторое положительное число. Так как $F(A) - F(-A) \leq \text{var}F \leq \delta$, то $F_{n_k}(A) - F_{n_k}(-A) < \delta + \varepsilon/4$, начиная с некоторого k . Учитывая, что интеграл

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt = \frac{e^{i\tau x} - e^{-i\tau x}}{ix} = \frac{2 \sin(\tau x)}{x}$$

и, следовательно, по модулю не превосходит 2τ (напомним, $|\sin x| \leq |x|$), получаем

$$\int_{|x| \leq A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x) \leq 2\tau(\delta + \varepsilon/4),$$

$$\int_{|x| > A} \left| \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt \right| dF_{n_k}(x) = 2 \int_{|x| > A} \left| \frac{\sin(\tau x)}{x} \right| dF_{n_k}(x) \leq$$

$$\int_{|x|>A} \frac{2}{|x|} dF_{n_k}(x) \leq \frac{2}{A}.$$

Если выбрать $A = 4/\tau\varepsilon$, то

$$\frac{1}{2\tau} \left| \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t) dt \right| \leq \delta + \varepsilon/2,$$

что противоречит (3) при $k \rightarrow \infty$ и, следовательно, предположению $\delta = \text{var}F < 1$. Итак, F – функция распределения, φ – соответствующая ей характеристическая функция и $F_n \Rightarrow F$.