§12. Характеристические функции. Теоремы единственности и сложения

Лекция 18

Мы введем сейчас одну из интереснейших функциональных характеристик случайной величины X, которая единственным образом определяет распределение X. С ее помощью можно найти все моменты X без вычисления интегралов, вычисляя производные от этой характеристики. Наконец, она представляет универсальный инструмент для вывода распределений сумм независимых случайных величин, поэтому с ее помощью можно просто и без громоздких выкладок доказывать предельные теоремы типа тех, что мы называли интегральной предельной теоремой Муавра–Лапласа.

Определение 12.1. *Характеристической функцией* $\varphi(t)$ случайной величины X с функцией плотности $f(x)$ по мере μ называется преобразование Фурье–Лебега $f(x)$:

$$\varphi(t) = \mathbf{E}e^{\mathrm{i}tX} = \int_{\mathrm{R}} e^{\mathrm{i}tx} f(x)d\mu(x).$$

Напомним, что в преобразованиях Фурье $\mathbf{i}$ – мнимая единица, так что $e^{\mathrm{i}tx} = \cos(tx) + \mathbf{i}\sin(tx)$, и интеграл, определяющий $\varphi(t)$ представляет собой интеграл от функции комплексного переменного (криволинейный интеграл второго рода) по действительной оси $\mathrm{R}=(-\infty, +\infty)$.

Характеристическая функция существует при любом распределении X, поскольку $|\, e^{\mathrm{i}tx}\,| = 1$, откуда

$$|\,\varphi(t)\,| \le \int_{\mathrm{R}} |\, e^{\mathrm{i}tx}\,| f(x)d\mu(x) = \int_{\mathrm{R}} f(x)d\mu(x) = 1.$$

Если $d\mu(x) = dx$ – мера Лебега, то $\varphi(t)$ есть обычное преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}tx} f(x)dx,$$

если же μ – считающая мера, то $\varphi(t)$ представляет дискретный аналог преобразования Фурье

$$\varphi(t) = \sum_{x} e^{\mathrm{i}tx} f(x).$$

Рассмотрим несколько примеров по вычислению характеристических функций известных нам распределений.

Пример 12.1 (*биномиальное распределение* $\mathrm{B(n,p)}$). Характеристическая функция вычисляется простым суммированием биномиального ряда:

$$\varphi(t) = \mathbf{E}e^{\mathbf{i}tX} = \sum_{x=0}^{n} e^{\mathbf{i}tx} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$\sum_{x=0}^{n} C_n^x \left(e^{\mathbf{i}t}p\right)^x (1-p)^{n-x} = \left(pe^{\mathbf{i}t} + (1-p)\right)^n.$$

Пример 12.2 (*распределение Пуассона* $\mathrm{P}(\lambda)$). Используем известное разложение Маклорена для показательной функции:

$$\varphi(t) = \sum_{x=0}^{\infty} E^{\mathbf{i}tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{\mathbf{i}t}\right)^x}{x!} = \exp\left\{\lambda\left(e^{\mathbf{i}t} - 1\right)\right\}.$$

Пример 12.3 (*равномерное распределение* $\mathrm{U(a,b)}$). Характеристическая функция представляет собой криволинейный интеграл по отрезку $[a;\,b]$ действительной прямой:

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{\mathbf{i}tx}dx = \frac{1}{b-a}\int_{[a;b]} e^{\mathbf{i}tz}dz.$$

Поскольку $e^{\mathbf{i}tz}$ есть аналитическая функция, то интеграл равен разности значений первообразной этой функции в конечных точках отрезка интегрирования:

$$\varphi(t) = \frac{e^{\mathbf{i}tb} - e^{\mathbf{i}ta}}{\mathbf{i}t(b-a)}.$$

Пример 12.4 (*показательное распределение* $\mathrm{E}(\theta)$). Характеристическая функция снова представляется криволинейным интегралом от аналитической функции, но на сей раз по бесконечному промежутку $[0;\,\infty)$ действительной прямой:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty \exp\left\{\mathbf{i}tx - x\theta^{-1}\right\}dx = \frac{1}{\theta}\lim_{A\to\infty}\int_{[0;A]} \exp\left\{z(\mathbf{i}t - \theta^{-1})\right\}dz =$$

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1 - \exp\{A(\mathbf{i}t - \theta^{-1})\}}{1 - \mathbf{i}t\theta}.$$

Однако

$$\big|\exp\{A(\mathbf{i}t - \theta^{-1})\}\big| = \exp\{-A\theta^{-1}\}\,|\exp\{\mathbf{i}At\}| = \exp\{-A\theta^{-1}\},$$

и так как $\theta > 0$, то

$$\lim_{A\to\infty} \exp\{A(\mathbf{i}t - \theta^{-1})\} = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 - \mathbf{i}t\theta}.$$

Можно, конечно, обойтись и без этой комплексной зауми, а просто воспользоваться формулой Эйлера $e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i}\sin z$ и каким-нибудь справочником по интегралам (например, родным „Демидовичем", а лучше всего справочником по интегральным преобразованиям).

Пример 12.5 (*распределение Коши* $\mathrm{C}(0,1)$). Используя формулу Эйлера, найдем характеристическую функцию стандартного (параметр сдвига $a = 0$, параметр масштаба $b = 1$) распределения Коши:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx + \mathbf{i}\sin tx}{1 + x^2}dx.$$

Интеграл от синуса (так называемое *синус-преобразование Фурье*) равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно начала координат промежутку, а для нахождения косинус-преобразования Фурье воспользуемся четностью функции $\cos x$ и ответом к примеру N 3825 задачника Демидовича:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos tx}{1 + x^2}dx = e^{-|t|}.$$

Пример 12.6 (*стандартное нормальное распределение* $\mathcal{N}(0,1)$). Рассуждая так же, как и в случае распределения Коши, и используя ответ к примеру N 3809, получаем

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \cos tx \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}.$$

Характеристические функции распределений Коши и нормального при произвольных значениях параметров можно получить просто линейной заменой переменной интегрирования, но легко видеть, что справедлива общая формула для семейств распределений, зависящих от параметров сдвига и масштаба.

Предложение 12.1. *Характеристическая функция $\varphi_X(t)$ случайной величины X обладает следующими свойствами.*

1^0. $\varphi(0) = 1,\ |\varphi(t) \leq 1$.

2^0. $\varphi_{bX+a} = e^{\mathbf{i}ta}\varphi_X(bt)$.

3^0. *Если $X_1, \ldots, X_n$ независимы в совокупности, то*

$$\varphi_{\sum_1^n X_k}(t) = \prod_1^n \varphi_{X_k}(t);$$

в частности, если $X_1, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены, то

$$\varphi_{\sum_1^n X_k}(t) = \varphi_{X_1}^n(t).$$

4^0. *Характеристическая функция $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на всей действительной оси* R.

5^0. *Если случайная величина X обладает моментами $\alpha_k = \mathbf{E}X^k,\ k = 1, \ldots, n$, то*

$$\alpha_k = \mathbf{i}^{-k}\varphi^{(k)}(0)$$

и для характеристической функции справедливо разложение Тейлора

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(\mathbf{i}t)^k}{k!}\alpha_k + o(t^n),\ t \to 0.$$

Доказательство. 1^0. Это свойство, по существу, было установлено сразу же после определения характеристической функции, когда мы рассуждали о ее существовании.

2^0. По определению характеристической функции

$$\varphi_{bX+a}(t) = \mathbf{E}e^{\mathbf{i}t(bX+a)} = e^{\mathbf{i}ta}\mathbf{E}e^{\mathbf{i}btX} = e^{\mathbf{i}ta}\varphi_X(bt).$$

3^0. Опять работаем с определением характеристической функции:

$$\varphi_{\sum_1^n X_k}(t) = \mathbf{E}\exp\left\{\mathbf{i}t\sum_1^n X_k\right\} = \mathbf{E}\prod_1^n e^{\mathbf{i}tX_k} = \prod_1^n \mathbf{E}e^{\mathbf{i}tX_k} = \prod_1^n \varphi_{X_k}(t).$$

Естественно, если $X_1, \ldots, X_n$ одинаково распределены, то произведение в правой части последнего равенства состоит из одинаковых сомножителей и мы получаем $\varphi^n_{X_1}(t)$.

4^0. Требуется доказать, что $\sup_{t\in\mathrm{R}} |\,\varphi(t+h) - \varphi(t)\,| \to 0$, когда $h \to 0$. Оценим приращение характеристической функции:

$$|\,\varphi(t+h) - \varphi(t)\,| =$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\mathbf{i}(t+h)x} - e^{\mathbf{i}tx}\right) f(x)d\mu(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\,e^{\mathbf{i}tx}\,||\,e^{\mathbf{i}hx} - 1\,|f(x)d\mu(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{(\cos hx\, - 1)^2 + \sin^2 hx} f(x)d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2(1-\cos hx)} f(x)d\mu(x).$$

Так как $0 \le 1 - \cos hx \le 1$, то последний интеграл сходится равномерно (признак Вейерштрасса) и можно переходить к пределу при $h \to 0$ под знаком интеграла. Но

$$\lim_{h\to 0}(1-\cos hx) = 0,$$

каково бы ни было $x \to \mathrm{R}$. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2(1-\cos hx)} f(x)d\mu(x) = 0,$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\sup_{t\in\mathrm{R}} |\,\varphi(t+h) - \varphi(t)\,| \to 0.$$

5^0. Формальное дифференцирование k раз под знаком интеграла в формуле, определяющей характеристическую функцию, приводит нас к соотношению

$$\varphi^{(k)}(t) = \mathbf{i}^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{\mathbf{i}tx} f(x)d\mu(x).$$

Если k-ый момент α_k существует, то (напомним, $|e^{\mathbf{i}tx}|=1$)

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{\mathbf{i}tx} f(x)d\mu(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)d\mu(x) < \infty,$$

поскольку существование интеграла Лебега от функции влечет его существование от модуля этой функции. Таким образом, в силу признака Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно, формальное дифференцирование под знаком интеграла оправдано, и мы получаем искомую формулу для вычисления моментов случайной величины X, полагая $t = 0:\ \varphi^{(k)}(0) = \mathbf{i}^k \alpha_k$.

Итак, существование момента k-го порядка влечет существование k-ой производной в точке $t = 0$ функции $\varphi(t)$. Если существует n моментов, то можно воспользоваться формулой Тейлора и получить асимптотическое $(t \to 0)$ разложение характеристической функции:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathbf{i}t)^k}{k!} \alpha_k + o(t^k).$$

Используя свойство 2^0, легко находим характеристическую функцию распределений $\mathrm{C}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ и $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Если $X \sim \mathrm{C}(0, 1)$, то $bX + a \sim \mathrm{C}(a, b)$, и характеристическая функция распределения Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi b[1 + ((x-a)/b)^2]}$$

равна (см. пример 12.5) $\varphi_{bX+a}(t) = \exp\{\mathbf{i}at - b|t|\}$. Аналогично, если $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то $\sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, и характеристическая функция нормального распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

равна (см. пример 12.6) $\varphi_{\sigma X+\mu}(t) = \exp\left\{\mathbf{i}\mu t - \sigma^2 t^2/2\right\}$.

Лекция 19

Из всех свойств характеристической функции, установленных в предложении 12.1, наиболее привлекательным кажется свойство 3^0, позволяющее находить характеристическую функцию суммы независимых случайных величин по характеристическим функциям слагаемых – открываются новые возможности в построении вероятностных моделей. Но при этом возникает естественный вопрос: существует ли взаимно однозначное соответствие между характеристическими функциями и функциями распределения (или плотности). Из курса математического анализа мы знаем, что на каждое преобразование Фурье

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}tx} f(x)dx$$

существует обратное преобразование

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}tx} \varphi(t)dt, \tag{1}$$

хотя, насколько мне известно, доказательства этой формулы обращения вам не давалось. Тем не менее, информацию о справедливости теоремы единственности вы получили, и мы теперь восполним пробел в вашем образовании, доказав аналогичную теорему для более общего преобразования Фурье–Лебега.

Теорема 12.1. (*формула обращения Леви*). *Если $F(x)$ – функция распределения с.в. X, а $\varphi(t)$ – ее характеристическая функция, то для любых точек непрерывности x и y функции $F(x)$ имеет место формула обращения*

$$F(y) - F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{-\mathrm{i}tx} - e^{-\mathrm{i}ty}}{it} \varphi(t)dt. \tag{2}$$

Доказательство.. Заметим сначала, что правая часть формулы обращения (2) представляет собой несобственный интеграл в смысле главного значения, так как $\varphi(t)/t$ может оказаться неинтегрируемой функцией. Если существует $f(x) = dF(x)/dx$ и характеристическая функция $\varphi(t)$ интегрируема, то (2) нетрудно получить из формулы обращения преобразования Фурье (1) проинтегрировав обе части (1) в пределах от x до y.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству формулы (2), для чего рассмотрим при $y > x$ интеграл

$$J_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{e^{-\mathrm{i}tx} - e^{-\mathrm{i}ty}}{it} \varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}t(u-x)} - e^{\mathrm{i}t(u-y)}}{it} f(u)d\mu(u),$$

в котором $\varphi(t)$ заменена на определяющий ее интеграл. Легко видеть, что при фиксированных x и y подынтегральная функция

$$\frac{e^{\mathbf{i}t(u-x)} - e^{\mathbf{i}t(u-y)}}{t}$$

в области $|u| < \infty$, $|t| < \infty$ непрерывна и ограничена, поэтому можно изменить порядок интегрирования:

$$J_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-A}^{A} \frac{e^{\mathbf{i}t(u-x)} - e^{\mathbf{i}t(u-y)}}{it} dt \right] f(u) d\mu(u).$$

Преобразуем внутренний интеграл I_A в пределах от $-A$ до A, для чего представим его в виде суммы интегралов по отрезкам $[-A, 0]$ и $[0, A]$ и в интеграле по отрезку $[-A, 0]$ сделаем замену t на $-t$. В результате получим

$$I_A = \int_0^A \left[\frac{e^{\mathbf{i}t(u-x)} - e^{-\mathbf{i}t(u-x)}}{it} - \frac{e^{\mathbf{i}t(u-y)} - e^{-\mathbf{i}t(u-y)}}{it} \right] dt =$$

$$2 \int_0^A \left[\frac{\sin(t(u-x))}{t} - \frac{\sin(t(u-y))}{t} \right] dt,$$

поскольку (формула Эйлера) $(e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z})/2\mathbf{i} = \sin z$.

Вычисляя интеграл Дирихле

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha,$$

получаем следующее выражение для правой части (2):

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(u-x) - \operatorname{sgn}(u-y)] f(u) d\mu(u).$$

Представим последний интеграл в виде суммы трех интегралов по отрезкам $(-\infty, x]$, $[x, y]$ и $[y, \infty)$, на которых, соответственно, $\operatorname{sgn}(u-x) = \operatorname{sgn}(u-y) = -1$, $\operatorname{sgn}(u-x) = -\operatorname{sgn}(u-y) = +1$, $\operatorname{sgn}(u-x) = \operatorname{sgn}(u-y) = 1$. Тогда этот интеграл, а следовательно, и правая часть (2), принимает окончательный вид

$$\int_x^y f(u) d\mu(u) = F(y) - F(x),$$

устанавливающий справедливость формулы обращения (2).

Итак, теперь можно не сомневаться, что, получив каким-либо способом характеристическую функцию наблюдаемой случайной величины X, мы, по сути дела, уже построили вероятностную модель, и остается только, используя формулу (2), найти функцию распределения X. Проиллюстрируем этот метод построения модели на одной из центральных задач *теории восстановления*, имеющей большие применения в практике и теории надежности систем, подвергаемых в процессе их эксплуатации ремонту (восстановлению), профилактике и резервированию компонент с высокой частотой отказа.

Гамма-распределение $\mathbf{G}(\lambda,\,\theta)$. Рассматривается система, долговечность которой определяется моментом отказа X_1 ее отдельного элемента. Предположим, что $X_1 \sim \mathrm{E}(\theta)$, то есть функционирование элемента протекает в рамках постулата „отсутствие последействия". Система имеет резерв, состоящий из $n-1$ таких же элементов, и при отказе работающего элемента мгновенно подключается запасной. Таким образом, общая долговечность системы определяется реализацией случайной величины $X = \sum_1^n X_i$, в которой слагаемые независимы и одинаково распределены по показательному закону $\mathrm{E}(\theta)$ с характеристической функцией (см. пример 12.4) $\varphi_1(t) = (1 - \mathbf{i}\theta t)^{-1}$.

В силу пункта 3^0 предложения 12.1 характеристическая функция X равна $\varphi(t) = (1-\mathbf{i}\theta t)^{-n}$. Применяя обратное преобразование Фурье к $\varphi(t)$ (советую воспользоваться справочником – такие интегралы на нашем богоугодном факультете считать теперь не учат), получаем функцию плотности распределения долговечности

$$f(x) = f(x\,|\,n,\,\theta) = \frac{1}{(n-1)!\theta^n}x^{n-1}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, \quad x > 0,$$

(естественно, $f(x) = 0$ при $x \le 0$).

Как будет видно в дальнейшем, полученное распределение долговечности с заменой целочисленного параметра n на произвольный положительный параметр λ описывает долговечность не только резервированных (или восстанавливаемых при отказе) систем, но и долговечность систем, подверженных износу, старению, накоплению усталости, в общем, всему тому, что постепенно накапливается, а потом приводит к „гибели". В связи с этими замечаниями мы определяем *гамма-распределение* $\mathrm{G}(\lambda,\,\theta)$ посредством функции плотности

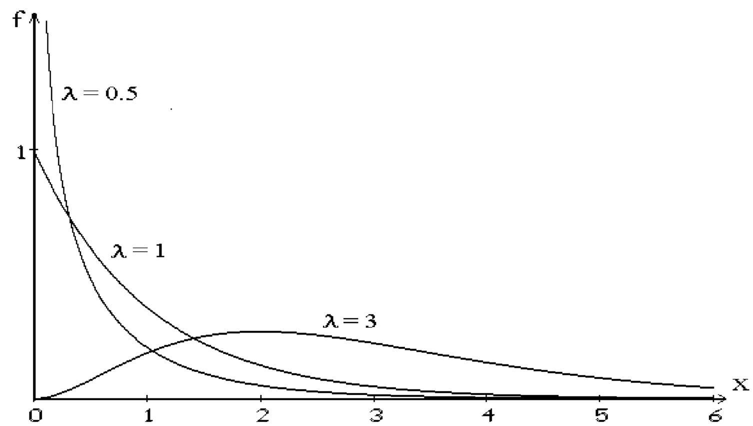
$$f(x\,|\,\lambda,\,\theta)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\theta^{\lambda}}x^{\lambda-1}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\},\quad x>0;\ \lambda>0,\ \theta>0,$$

где

$$\Gamma(\lambda)=\int\limits_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx$$

– гамма-функция Эйлера.

Семейство двухпараметрических гамма-распределений $\{\mathrm{G}(\lambda,\,\theta),$ $(\lambda,\theta)\in\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\}$ содержит, как частный случай, показательное распределение ($\lambda=1$). Гамма-распределение унимодально: если $\lambda\le 1$, то $\mathrm{mod}X=0$, а при $\lambda>1$ мода $\mathrm{mod}X=\theta(\lambda-1)$.



У гамма-распределения существуют моменты любого порядка:

$$\alpha_k=\mathbf{E}X^k=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\theta^{\lambda}}\int\limits_0^\infty x^{\lambda+k-1}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}dx=$$

$$\frac{\Gamma(\lambda+k)\theta^{\lambda+k}}{\Gamma(\lambda)\theta^{\lambda}}=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)\theta^k.$$

В частности, $\mathbf{E}X=\lambda\theta,\ \mathbf{D}X=\lambda\theta^2$.

Теперь, используя аппарат характеристических функций, мы можем составить каталог изученных нами распределений, для которых справедлива теорема сложения.

Предложение 12.2. *Пусть* $X_1,\ldots,X_n$ *независимы и* $S_n=\sum_1^n X_k$. *Тогда,*

1^0 *если* $X_k\sim\mathrm{B}(\,\mathrm{m_k},\,\mathrm{p}\,),\quad k=1,\ldots,n,\quad$ *то* $\quad S_n\sim\mathrm{B}(\,\sum_1^{\mathrm{n}}\mathrm{m_k},\ \mathrm{p}\,)$;

2^0 *если* $X_k \sim \mathrm{P}(\lambda_k)$, $\quad k = 1, \ldots, n$, $\quad$ *то* $\quad S_n \sim \mathrm{P}(\sum_1^n \lambda_k)$;

3^0 *если* $X_k \sim \mathrm{C}(\mathrm{a_k}, \mathrm{b_k})$, $k = 1, \ldots, n$, *то* $S_n \sim \mathrm{C}(\sum_1^{\mathrm{n}} \mathrm{a_k}, \sum_1^{\mathrm{n}} \mathrm{b_k})$;

4^0 *если* $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \ldots, n$, *то* $S_n \sim \mathcal{N}(\sum_1^n \mu_k, \sum_1^n \sigma_k^2)$;

5^0 *если* $X_k \sim \mathrm{G}(\lambda_\mathrm{k}, \theta)$, $\quad k = 1, \ldots, n$, $\quad$ *то* $\quad S_n \sim \mathrm{G}(\sum_1^{\mathrm{n}} \lambda_\mathrm{k}, \theta)$.

Доказательство. Следующая таблица характеристических функций отдельных слагаемых X_k и суммы S_n устанавливает справедливость всех утверждений предложения.

1^0 $\mathrm{B(m, p)}$:

$$\varphi_{X_k}(t) = \left(pe^{\mathbf{i}t} + 1 - p\right)^{m_k}, \ \varphi_{S_n}(t) = \left(pe^{\mathbf{i}t} + 1 - p\right)^{\sum_1^n m_k};$$

2^0 $\mathrm{P}(\lambda)$:

$$\varphi_{X_k}(t) = \exp\left\{\lambda_k(e^{\mathbf{i}t} - 1)\right\}, \ \varphi_{S_n}(t) = \exp\left\{\sum_k^n \lambda_k(e^{\mathbf{i}t} - 1)\right\};$$

3^0 $\mathrm{C(a, b)}$:

$$\varphi_{X_k}(t) = \exp\{\mathbf{i}ta_k - |\,t\,|b_k\}, \ \varphi_{S_n}(t) = \exp\{\mathbf{i}t\sum_1^n a_k - |\,t\,|\sum_1^n b_k\};$$

4^0 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$\varphi_{X_k}(t) = \exp\left\{\mathbf{i}t\mu_k - \tfrac{t^2}{2}\sigma_k^2\right\}, \ \varphi_{S_n}(t) = \exp\left\{\mathbf{i}t\sum_1^n \mu_k - \tfrac{t^2}{2}\sum_1^n \sigma_k^2\right\};$$

5^0 $\mathrm{G}(\lambda, \theta)$:

$$\varphi_{X_k}(t) = (1 - \mathbf{i}\theta t)^{-\lambda_k}, \ \varphi_{S_n}(t) = (1 - \mathbf{i}\theta t)^{-\sum_1^n \lambda_k}.$$

Несколько слов о характеристической функции многомерного распределения. Если $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ – случайный вектор с функцией плотности $f_n(x^{(n)}) = f_n(x_1, \ldots, x_n)$ по мере $d\mu_n(x^{(n)}) = d\mu_1(x_1)\cdots$ $\cdots d\mu_n(x_n)$, то характеристическая функция определяется как n-мерное преобразование Фурье-Лебега

$$\varphi_n(t^{(n)}) = \mathbf{E}\exp\left\{\mathbf{i}\left(t^{(n)}, X^{(n)}\right)\right\} = \int_{\mathrm{R_n}} \exp\left\{\mathbf{i}\sum_1^n t_k x_k\right\} f_n(x^{(n)})d\mu_n(x^{(n)}).$$

Очень просто, по прямой аналогии с биномиальным распределением, находится характеристическая функция мультиномиального распределения, и столь же просто, если воспользоваться ответом к задаче N 4220 из Демидовича, характеристическая функция n-мерного нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$:

$$\varphi_n(t^{(n)}) = \exp\left\{\mathbf{i}\sum_1^n \mu_k t_k - \frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le n} \lambda_{jk} t_j t_k\right\}.$$

Для многомерной характеристической функции также справедливы теоремы единственности и утверждения, аналогичные предложению 12.1. Используя аппарат многомерных характеристических функций, можно показать, что для мультиномиального и многомерного нормального распределений справедливы теоремы сложения, и доказать следующее удивительное свойство многомерного нормального распределения: *любое линейное преобразование* $Y^{(m)} = \mathbf{A}X^{(n)}$ *(с матрицей* $\mathbf{A}$ *размерности* $n \times m$*) случайного вектора* $X^{(n)} \sim \mathcal{N}(\mu, \Lambda)$ *дает случайный вектор, имеющий* m*-мерное нормальное распределение со средним* $\mu\mathbf{A}$ *и ковариационной матрицей* $\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A}'$.