§1. Элементарная теория вероятностей

Лекция 1

Во многих областях человеческой деятельности существуют ситуации, когда определенные явления могут повторяться неограниченное число раз в одинаковых условиях. Анализируя последовательно результаты таких простейших явлений, как подбрасывание монеты, игральной кости, выброс карты из колоды и т.п., мы замечаем две особенности, присущие такого рода экспериментам. Во-первых, не представляется возможным предсказать исход последующего эксперимента по результатам предыдущих, как бы ни было велико число проведенных испытаний. Во-вторых, относительная частота определенных исходов по мере роста числа испытаний стабилизируется, приближаясь к определенному пределу. Следующая таблица служит подтверждением этого замечательного факта, составляющего основу аксиоматического построения теории вероятностей как математической дисциплины.

$N\backslash n$	10^2	10^4	10^6
1	41	4985	499558
2	48	5004	499952
3	44	5085	500114
4	52	4946	500064
5	58	4978	500183
6	52	4985	499533
7	45	5012	500065
8	50	4931	500317
9	52	5016	500449
10	45	4973	500704
Er	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

Первый столбец этой таблицы указывает номер эксперимента; последующие столбцы содержат данные о количествах m выпадения герба в $n(= 10^2, 10^4, 10^6)$ подбрасываниях (испытаниях) правильной симметричной монеты. Таким образом, проводилось три серии экспериментов с разным числом испытаний в каждой серии. Каждая серия состоит из десяти экспериментов с одним и тем же числом n подбрасываний монеты, что позволяет судить об изменчивости числа m выпадений герба от эксперимента к эксперименту внутри одной серии. Очевидна стабилизация относительной частоты $p_n = m/n$ выпадений герба с ростом числа испытаний n, а также стремление p_n к величине $p = 1/2$. Можно даже высказать некоторое суждение об изменчивости этой частоты от эксперимента к эксперименту при фиксированном n: отклонение p_n от центра рассеивания, равного $1/2$, имеет порядок $n^{-1/2}$ (см. в связи с этим нижнюю строку таблицы).

Обнаруженные закономерности, распространенные на испытания с произвольным числом исходов, позволяют построить простейшую математическую модель *случайного эксперимента.*

Построение начинается с описания множества Ω всевозможных исходов ω, которые могут произойти в результате каждого испытания. Множество Ω называется *пространством элементарных исходов*, его точки (элементы) ω – *элементарными исходами* или *элементарными событиями.* Любое подмножество A пространства Ω (совокупность элементарных исходов ω) называется *событием*; пространство Ω также является событием, но имеющим особое название *достоверного события.* Говорят, что *произошло событие* A, если в испытании наблюдается элементарный исход $\omega \in A$.

В этом параграфе, посвященном так называемой *элементарной теории вероятностей*, будут рассматриваться только пространства Ω, состоящие из не более чем счетного числа элементов. Проиллюстрируем введенные понятия на ряде простейших примеров, относящихся к случайным испытаниям.

Пример 1.1. Подбрасывается правильная монета и регистрируется сторона (герб или решка) монеты, которая обращена к наблюдателю после ее падения. Пространство Ω состоит из двух точек: $\omega_1 = Г$ (выпал герб) и $\omega_2 = Р$ (выпала решка). Любое событие A в этом примере является либо элементарным, либо достоверным.

Пример 1.2. Правильная монета подбрасывается два раза или, что одно и то же, подбрасываются две монеты. Пространство Ω содержит четыре точки: $ГГ, ГР, РГ, РР$. Событие $A = \{ГР, РГ\}$ означает, что монеты выпали на разные стороны, и, очевидно, не является элементарным событием. Интересно, что на раннем этапе становления теории вероятностей это событие рассматривалось как элементарное (то есть полагалось $\Omega = \{ГГ, A, РР\}$), и это приводило к вероятностной модели результатов испытаний двух правильных монет, которая противоречила наблюдаемой частоте элементарных исходов.

Пример 1.3. Бросается игральная кость и регистрируется число выпавших очков (номер грани игральной кости). Пространство элементарных исходов состоит из шести элементов $\omega_i = i, \quad i = 1, \ldots, 6$. Пример составного события: $A = \{2, 4, 6\}$ – выпало четное число очков.

Пример 1.4. Бросаются две игральные кости. Пространство элементарных исходов можно представить в виде матрицы $\Omega = \|(i, j)\|$,
$i, j = 1, \ldots, 6$. Пример составного события: сумма очков больше 10; появление этого события возможно лишь при элементарных исходах (5,6), (6,5), (6,6).

Пример 1.5. Подбрасываются n монет. Пространство Ω содержит 2^n элементов; любой элементарный исход ω имеет вид "слова", состоящего из букв Г и Р, например, $P\Gamma\Gamma PP, \ldots, \Gamma P\Gamma$. Пример составного события, состоящего из C_n^k элементарных исходов: "выпало k гербов".

Пример 1.6. Монета подбрасывается до первого появления герба. Пространство Ω состоит из счетного числа элементов вида $\omega_i = P \ldots P\,\Gamma$, в которых начальные Р повторяются $i - 1$ раз, $i = 1, 2, \ldots$ Пример составного события, осуществление которого сопряжено с появлением одного из четырех элементарных исходов,– "герб появился до пятого подбрасывания монеты".

Пример 1.7. Наблюдатель фиксирует число метеоров, появившихся в заданном секторе небесного свода в течение фиксированного промежутка времени. Поскольку не представляется возможным ограничить сверху число возможных появлений метеоров, то естественно отождествить Ω, с множеством всех неотрицательных целых чисел $\{0, 1, 2 \ldots\}$, то есть положить $\omega_k = k$. Пример составного события: $A = \{1, 2 \ldots\}$ – "наблюдался по крайней мере один метеор".

Если ограничиться рассмотрением пространств элементарных исходов, состоящих из не более чем счетного числа элементов, то построение вероятностной модели по существу состоит в задании *распределения вероятностей* на пространстве Ω, в соответствии с которым каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие число $p(\omega)$, называемое *вероятностью* элементарного события ω. Постулируется, что $0 \le p(\omega) \le 1$, каково бы ни было $\omega \in \Omega$, и $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Вероятность любого составного события A вычисля-

ется по формуле
$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Число $P(A)$ интерпретируется как относительная частота появления события A в статистическом эксперименте, состоящем из достаточно большого числа испытаний. Опираясь на эту интерпретацию, легко построить распределение вероятностей в примерах 1.1–1.6.

Если подбрасывается "правильная" (симметричная) монета (см. пример 1.1), то естественно определить вероятности элементарных исходов из условия симметрии и положить $p(Г) = p(P) = 1/2$, что блестяще подтверждается результатами статистических экспериментов (см. таблицу 1). Однако уже при подбрасывании двух монет (пример 1.2) у части неискушенных исследователей возникает желание нарушить условие симметрии и приписать исходам ГГ и РР меньшую вероятность, чем ГР или РГ. В истории стохастики известен также парадокс, основанный на некорректном определении пространства Ω, когда составное событие $A = \{ГP, PГ\}$ трактовалось как элементарное и, следуя „аксиоме симметрии", утверждалось, что $p(ГГ) = p(PP) = p(A) = 1/3$. Поскольку результаты опытов противоречили такой вероятностной модели (наблюдения показывали, что $p(A) = 1/2, p(ГГ) = p(PP) = 1/4$), то указанный феномен объявлялся парадоксом теории вероятностей, над разрешением которого бились многие известные математики и естествоиспытатели, в том числе и великий Даламбер. Все разъяснилось только после четкого математического определения *независимости* событий. Мы познакомимся с этим фундаментальным понятием теории вероятностей несколько позднее, а пока, следуя принципу симметрии, припишем каждому из четырех элементарных исходов, наблюдаемых при подбрасывании двух монет, одну и ту же вероятность $1/4$. Как уже говорилось выше, эта вероятностная модель согласуется с результатами наблюдений частот элементарных исходов в соответствующем статистическом эксперименте, состоящем из большого числа испытаний двух правильных монет.

Чтобы закончить с испытаниями правильных монет, обратимся сразу к примеру 1.5, где элементарный исход формируется из результатов подбрасываний n монет. В этой ситуации убедить вышеупомянутого „неискушенного исследователя" в равновероятности всех элементарных исходов практически невозможно. Например, считается, что элементарный исход ГГГГГГГГГГ имеет значительно меньшую вероятность появления, чем исход РРГРГГГРРГ (здесь $n = 10$). Это чисто психологический феномен, связанный с неосознанной подменой этих двух элементарных исходов двумя составными событиями: A – все монеты выпали одной стороной (событие, состоящее из двух элементарных исходов) и B – хотя бы одна монета выпала не той стороной, что все остальные (событие, состоящее из $2^n - 2$ исходов). По этой же причине абсолютное большинство покупателей лотерейных билетов откажутся от билета, номер которого состоит из одинаковых цифр, хотя, очевидно, все билеты имеют одинаковый шанс быть выигрышными. В последнем легко убедиться, наблюдая, как происходит розыгрыш лотерейных билетов, то есть как обеспечивается *равновероятность* билетов вне зависимости от их номеров. Итак, в примере 1.5 вероятностная модель определяется вероятностями $p(\omega) = 2^{-n}$, каково бы ни было $\omega \in \Omega$. В соответствии с этой, подтверждаемой реальными статистическими экспериментами, моделью вероятности упомянутых событий A и B равны соответственно $1/2^{n-1}$ и $1 - 1/2^{n-1}$. Например, при $n = 10 \quad P(A) = 1/524$, а $P(B) = 523/524$, так что событие B происходит в 523 раза чаще, чем событие A.

Принцип ,,симметрии" также применяется и в построении вероятностной модели испытаний правильной кости (примеры 1.3 и 1.4). Естественно, все грани имеют одинаковую вероятность выпадения, в соответствии с чем $p(\omega) = 1/6$ в примере 1.3 и $p(\omega) = 1/36$ в примере 1.2, каково бы ни было $\omega \in \Omega$. Однако не следует излишне доверять этой модели на практике, когда вам придется играть в кости с приятелем или в казино. При раскопках египетских пирамид были найдены игральные кости со смещенным центром тяжести, так что еще за тысячелетия до нашей эры находились "весьма искушенные испытатели", способные управлять частотой элементарных исходов.

Распределение вероятностей в примере 1.6 можно получить, используя те же рассуждения, что и в примерах 1.1, 1.2 и 1.5. Действительно, осуществление элементарного исхода ω_1 означает выпадение герба в однократном подбрасывании монеты, так что (см. пример 1.1) $p_1 = p(\omega_1) = 1/2$. Элементарный исход ω_2 совпадает с элементарным исходом РГ в примере 1.2, следовательно, $p_2 = p(\omega_2) = 1/4$. Наконец, при произвольном $n = 1, 2, \ldots$, используя вероятность элементарного исхода $PP, \ldots, P\Gamma$ (первые $n-1$ испытаний закончились выпадением решки, а при n-ом испытании выпал герб) в примере 1.5, получаем $p_n = p(\omega_n) = 2^{-n}$. Завершив построение вероятностной модели, убедимся в справедливости равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Итак, при построении вероятностных моделей в примерах 1.1–1.6 мы существенно использовали физическую природу объектов, с которыми проводились эксперименты, – монета и кость были "правильными"(симметричными), и только это свойство позволило нам приписать одинаковые вероятности всем элементарным исходам. Если подбрасывается гнутая монета, то определить вероятность p выпадения герба, используя уравнения, описывающие динамику полета вращающейся неправильной монеты и закономерности ее упругого столкновения с поверхностью, представляет собой весьма сложную и вряд ли разрешимую задачу. Следует также отметить, что если p известно, но не равно $1/2$, то мы не в состоянии найти распределение вероятностей в примерах 1.2 и 1.5 с многократным подбрасыванием монеты, пока не формализовано понятие независимости испытаний монеты.

Если теперь обратиться к примеру 1.7, то в свете вышесказанного становится понятным, что построение вероятностной модели численности метеоров невозможно без привлечения знаний об их распределении в околоземном пространстве, учета эффекта вращения Земли в интенсивности появления метеоров, разделения метеорных явлений на "потоки" и "спорадический фон". Учитывая наши более чем скудные познания в теории вероятностей, следует признать, что решение этой задачи нам пока "не по зубам". И все же, предвосхищая наши дальнейшие построения, наиболее любопытным и нетерпеливым сообщу, что после учета эффекта вращения Земли распределение метеоров в спорадическом фоне выражается формулой

$$p_k = p(\omega_k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Мы завершим этот параграф решением некоторых задач, в которых используются модели, основанные на равновероятности элементарных исходов. Все эти задачи, так или иначе, сводятся к подсчету числа элементарных исходов, влекущих некоторое событие A; определение вероятности этого события и составляет предмет задачи.

Задача 1.1. Бросаются две правильные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков больше 6.

В соответствии с распределением вероятностей, полученным в примере 4, все 36 элементарных исходов имеют одинаковую вероятность 1/36, так что для решения задачи достаточно подсчитать число целых решений неравенства $x+y>6$ или обратиться к матрице элементарных исходов $\|\omega_{i,j}\|$, выделив в ней элементы с $i+j>6$, составляющие искомое событие A,

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \mathbf{16} \\ 21 & 22 & 23 & 24 & \mathbf{25} & \mathbf{26} \\ 31 & 32 & 33 & \mathbf{34} & \mathbf{35} & \mathbf{36} \\ 41 & 42 & \mathbf{43} & \mathbf{44} & \mathbf{45} & \mathbf{46} \\ 51 & \mathbf{52} & \mathbf{53} & \mathbf{54} & \mathbf{55} & \mathbf{56} \\ \mathbf{61} & \mathbf{62} & \mathbf{63} & \mathbf{64} & \mathbf{65} & \mathbf{66} \end{pmatrix}$$

Число “благоприятных” для события A исходов (они выделены жирным шрифтом) равно (1+6)6/2=21, откуда $P(A) = 21/36 = 7/12$. Итак, если вам предложат играть в кости, где ставка идет на сумму очков больше 6 или на противоположное событие $i+j \leq 6$, то следует ставить на первое событие - в среднем один раз из двенадцати ставок вы будете получать дополнительный выигрыш по сравнению с вашим партнером по игре.

Задача 1.2. (*вероятностная задача Шевалье де Мере*). Один из создателей современной теории математической статистики Ю.Нейман утверждает, что основателями теории статистических решений следует считать тех азартных игроков, которые впервые стали рассчитывать шансы определенных ставок при игре в кости, карты и т.п., и в связи с этим излагает некоторые фрагменты из переписки Б.Паскаля с одним из таких игроков. Ниже приводится выдержка из вводного курса Ю.Неймана по теории вероятностей и математической статистике.

“В конце семнадцатого века один французский вельможа Шевалье де Мере, известный игрок в азартные игры, в частности в кости, заинтересовался возможностью вычислить математически, как следует делать ставки. Его интересовала игра, состоящая из 24 бросаний пары костей. По правилам игры ставить можно было или на появление "двойной шестерки" по крайней мере один раз в 24 бросаниях, или против этого результата.

Вычисления Шевалье де Мере привели его к заключению, что в длинном ряде игр "двойная шестерка" должна появляться (хоть один раз) более чем в пятидесяти процентах всех игр и что поэтому выгодно ставить на появление двойной шестерки. Хотя Шевалье де Мере был уверен в правильности своих вычислений, он сомневался в надежности математики и произвел очень длинный ряд опытов с бросанием костей. (Этот эмпирический метод применяется и теперь и носит название "метод Монте-Карло"). Оказалось, что частность двойной шестерки в ряду игр меньше пятидесяти процентов! Получив этот результат, де Мере рассвирепел и написал известному французскому математику Паскалю письмо, утверждающее, что математика как наука никуда не годится, и пр. Письмо это было настолько яростным и вместе с тем забавным, что попало в историю!

Паскаль рассмотрел задачу Шевалье де Мере, и ответ его гласил: если кости "правильные", то относительная частота игр с хотя бы одной двойной шестеркой равна 0.491. Таким образом, оказалось, что математические выкладки Шевалье де Мере были ошибочны, а его эмпирический результат согласуется с теорией"(конец цитаты).

Приведем решение задачи де Мере, данное Паскалем.

Пространство элементарных событий Ω в этой задаче состоит из 36^{24} равновероятных исходов. Следовательно, для решения задачи достаточно подсчитать число элементарных исходов, влекущих событие A : двойная шестерка появилась хотя бы один раз. Однако несомненно проще подсчитать число исходов для противоположного события A^c : ни одно из бросаний двух костей не закончилось появлением двойной шестерки. Очевидно, число таких исходов равно 35^{24}, откуда число исходов, благоприятствующих событию A, равно $36^{24} - 35^{24}$ и $P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491$.

Можно предположить, что де Мере напрямую, не зная, по всей видимости, формулы биномиальных коэффициентов, подсчитывал, сколько элементарных исходов благоприятствует однократному появлению двойной шестерки, потом двукратному, и так далее до 24, а потом сложил эти числа. Призвести все эти действия с многозначными числами и при этом не ошибиться, вряд ли по плечу даже французскому вельможе! Из всей этой истории мы должны сделать один практически важный при решении задач вывод: переход к противоположному событию и использование очевидной формулы

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

может значительно упростить решение вероятностной задачи, связанной с комбинаторными выкладками.

Лекция 2

Задача 1.3. (*гипергеометрическое распределение вероятностей*). Существует довольно большой класс задач элементарной теории вероятностей, которые можно интерпретировать в рамках так называемой *урновой схемы*: событие, вероятность которого необходимо вычислить, можно трактовать как результат случайного выбора шаров различной расцветки из урны. Простейшая из таких урновых схем состоит в следующем. Из урны, содержащей M черных и $N-M$ белых, шаров случайным образом отбирается n шаров. Какова вероятность, что выборка содержит m черных шаров (событие A)?

В этом эксперименте пространство элементарных событий состоит из C_N^n исходов (шары одинакового цвета не различаются), и случайность отбора означает, что элементарные исходы имеют одну и ту же вероятность $1/C_N^n$. Следовательно, решение задачи сводится к подсчету числа выборок из n шаров, которые содержат m черных и $n-m$ белых. Очевидно,

$$\max(0,\ n-(N-M)) \le m \le \min(n, M), - \tag{1}$$

если объем выборки n превышает число черных шаров M, то мы не сможем выбрать более чем M черных, и если n больше, чем число белых шаров $N-M$, то число m черных шаров в выборке не может быть меньше $n-(N-M)$.

Из M черных шаров выбирается m шаров того же цвета, и число всевозможных способов такого выбора равно C_M^m. Аналогично, из $N-M$ белых шаров $n-m$ шаров того же цвета можно выбрать C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, общее число исходов, благоприятствующих событию A, равно $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$, и искомая вероятность

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{2}$$

Говорят, что формула (2) определяет *гипергеометрическое распределение* целочисленной *случайной величины* X, принимающей значение из области (1), – вероятность $p_m = P(X = m|N, M, n)$ равна правой части (2) при любом m из области (1) и $\sum p_m$ по всем m, удовлетворяющим (1), равна 1.

Приведем несколько примеров на применения гипергеометрического распределения вероятностей.

1. *Выигрыш в лотерее Спортлото "6 из 49".* В начале 70-х годов получила распространение разновидность лотереи, носящая название "спортлото". Участник лотереи из 49 видов спорта, обозначенных просто цифрами, называет шесть. Выигрыш определяется тем, сколько наименований он угадал из шести других наименований, которые были заранее выделены комиссией. Спрашивается, какова вероятность того, что участник угадает все шесть наименований, пять наименований и т.д.

Нетрудно видеть, что это есть не что иное, как задача о гипергеометрическом распределении, где $N = 49$, $M = 6$ (угадываемые номера – черные шары), $n = 6$ и $m(= 1, \ldots, 6)$ – число угаданных номеров. Вероятность угадать m номеров равна

$$P(X = m|49, 6, 6) = \frac{C_6^m C_{43}^{6-m}}{C_{49}^6}.$$

Например, вероятность максимального выигрыша $(m = 6)$ равна

$$C_6^6 C_{43}^0 / C_{49}^6 = 1/C_{49}^6 = 6!43!/49! \approx 7.2 \cdot 10^{-8}.$$

Это меньше одной десятимиллионной(!) – шансы на выигрыш ничтожны.

2. *Как вытащить "счастливый" билет на зкзамене?* Группа из N студентов сдает экзамен, на котором каждому студенту предлагается выбрать наугад один из N билетов. Студент Петров знает $M(< N)$ билетов, и считает, что если он пойдет сдавать экзамен первым, то шансов "вытянуть" счастливый билет у него несомненно больше, чем если он пойдет отвечать последним (его доводы в пользу этого – "все счастливые билеты будут разобраны"). Прав ли Петров?

Если Петров пойдет первым, то вероятность выбора счастливого билета равна, очевидно, M/N. Если же Петров идет последним, то мы можем при расчете вероятности воспользоваться гипергеометрическим распределением $P(X = M-1|N, M, N-1)$ – предшествующие Петрову $N-1$ студентов (объем выборки $n = N-1$) должны выбрать ровно $m = M-1$ счастливых билетов, и тогда Петрову, который сдает последним, достанется счастливый билет. Имеем

$$P(X = M-1|N, M, N-1) = \frac{C_M^{M-1} C_{N-M}^{(N-1)-(M-1)}}{C_N^{N-!}} = \frac{C_M^{M-1}}{C_N^{N-1}} = \frac{M}{N},$$

так что шансы выбрать счастливый билет одинаковы. Нетрудно, производя аналогичные выкладки, убедиться, что шансы выбрать счастливый билет вообще не зависят от того, каким по счету придет Петров на экзамен, – они всегда одни и те же M/N.

3. *Оценка численности замкнутой популяции животных (метод максимального правдоподобия.* Предыдущие два примера иллюстрировали применение вероятностной модели гипергеометрического распределения к решению, так называемых, *прямых* задач теории вероятностей: зная *параметры* модели N, M и n, мы определяли вероятности событий, связанных со значениями случайной величины X. Но в естественных науках (физика, биология, экономика и пр.) обычно приходится решать *обратные* задачи – наблюдая значения случайной величины X, исследователь стремится сделать определенное заключение о неизвестных параметрах вероятностной модели. Решением таких обратных задач занимается родственная теории вероятностей наука *математическая статистика*. Следующий пример иллюстрирует один из типичных методов решения задачи по оценке параметра вероятностной модели.

Проблема состоит в определении численности N рыб, живущих на момент наблюдения в замкнутом водоеме, скажем, в пруду рыбоводного хозяйства. Для определения (точнее, приближенной оценки) N исследователь отлавливает заданное количество M рыб, метит их каким-либо способом и возвращает в пруд. По истечении некоторого промежутка времени, когда, по его мнению, меченые рыбы "перемешались" с другими обитателями пруда, он снова отлавливает фиксированное количество n рыб (в математической статистике эта процедура называется извлечением выборки объема n из генеральной совокупности) и подсчитывает число m отмеченных рыб, попавших во второй улов. В рамках гипергеометрической модели такого эксперимента мы располагаем значениями параметров M и n, знаем результат m наблюдения случайной величины X, но не знаем значения параметра N гипергеометрического распределения $P(X = m|N, M, n)$.

Один из основных методов решения обратных задач теории вероятностей (задач математической статистики), который называется *методом максимального правдоподобия*, состоит в выборе такого значения $\hat{N}$ параметра N, которое соответствует максимуму вероятности наблюдаемого исхода m в наблюдении X. Основной довод в пользу такого поведения статистика состоит в простом житейском наблюдении: если происходит какое-либо событие, то это событие должно иметь большую вероятность по сравнению с другими исходами статистического эксперимента.

Итак, метод максимального правдоподобия предлагает в качестве оценки неизвестного значения N (численности рыб в пруду) взять решения следующей задачи на экстремум:

$$\hat{N} = \arg\max_N \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Решить эту задачу можно с помощью определения значения N, при котором происходит смена неравенства

$$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} < \frac{C_M^m C_{N+1-M}^{n-m}}{C_{N+1}^n}$$

на обратное. Используя известную формулу для вычисления биномиальных коэффициентов, находим, что это неравенство эквивалентно $(N+1)m < nM$, откуда получаем оценку максимального правдоподобия для численности рыб в пруду:

$$\hat{N} = \left[n\frac{M}{m} \right].$$

Легко заметить, что такая оценка согласуется с простыми рассуждениями типа, , ,если при повторном отлове я обнаружил половину отмеченных рыб, то в пруду их в два раза больше, чем я поймал".

Задача 1.4. *Геометрические вероятности: задача о встрече.* Два человека договорились встретиться в течение определенного часа. Предлагается, что момент прихода каждого из встречающихся не зависит от намерений другого и имеет "равномерное" распределение в назначенном промежутке встречи 60 минут (момент прихода случаен). Пришедший первым ждет другого только 10 минут, после чего уходит (встреча не состоялась). Какова вероятность встречи?

Это одна из типичных задач *геометрической вероятности*, для решения которой используется следующая математическая формализация понятия "случайности" момента прихода. Рассмотрим более общую (и более абстрактную) задачу. В эвклидовом пространстве R^n выделяется замкнутая область Ω конечной лебеговой меры $\mu(\Omega)$. На область Ω случайно бросается точка, и требуется определить вероятность того, что точка попадет в подмножество $S \subset \Omega$. Естественно формализвать понятие "случайности" в терминах независимости вероятности попадания точки в S от положения этого множества в области Ω и его конфигурации, и постулировать, что искомая вероятность пропорциональна $\mu(S)$. В таком случае Ω играет роль пространства элементарных исходов, вероятность попадания точки в Ω должна равняться единице, так что вероятность попадания в множество S равна $P(S) = \mu(S)/\mu(\Omega)$.

Используем этот метод в решении задачи о встрече. Здесь Ω – квадрат 60×60, множество S – полоса вдоль диагонали квадрата, которую в декартовой системе координат можно задать в виде области $|x-y| \leq 10$. Очевидно, площадь этой области равна $60 \cdot 60 - 50 \cdot 50$, площадь квадрата – $60 \cdot 60$, откуда искомая вероятность встречи, равная отношению площадей, $P(S) = 1 - (50/60)^2 = 11/36$.

Основный вывод, который мы должны сделать из решения данной задачи, состоит в осознании невозможности определения вероятности на несчетных пространствах Ω посредством задания функции $p(\omega)$, как вероятности элементарного исхода $\omega \in \Omega$. Распределение вероятностей следует определять с помощью функций на подмножествах Ω, причем эти функции должны быть *нормированными мерами* – вероятность всего Ω должна равняться единице, и $P(S)$ должна обладать свойством счетной аддитивности.