## §6. Доверительные интервалы

*Лекция 9*

Мы рассмотрели несколько методов построения *точечных* оценок для параметров, значения которых определяют распределение наблюдаемой случайной величины. Был получен ряд утверждений о распределении таких оценок, что позволяет судить о надежности оценки при заданной точности, то есть вычислять вероятности событий вида $|\,\hat{\theta}_n(X^{(n)}) - \theta\,| \le \Delta$ при каждом фиксированном значении параметра $\theta$. Поскольку именно значение $\theta$ нам неизвестно, то такого рода вычисления зачастую лишены практического смысла – слишком велик размах в надежности оценки $\hat{\theta}_n$ при различных $\theta$, даже в случае, когда мы располагаем некоторой априорной информацией о возможной области значений этого параметра. Поэтому в ряде практических ситуаций пытаются решать обратную задачу: для фиксированной надежности, скажем, $1-\alpha$, где $\alpha$ мало, указать некоторую область значений $\theta$, зависящую, естественно, от выборки $X^{(n)}$, которая с вероятностью, не меньшей $1-\alpha$, накрывает истинное, неизвестное нам значение $\theta$, причем такое надежностное утверждение должно выполняться при любых $\theta \in \Theta$. В таком случае по размерам области, которые определяются выборочными значениями $x^{(n)}$, можно судить о точности такой *интервальной* оценки.

**Определение 6.1.** Подмножество $\Delta_n = \Delta_n(X^{(n)})$ параметрического пространства $\Theta$ называется $(1-\alpha)$-*доверительной областью*, если

$$P_\theta\left(\Delta_n(X^{(n)}) \ni \theta\right) \ge 1 - \alpha, \qquad (1)$$

каково бы ни было значение $\theta \in \Theta$. Заданное (фиксированное) значение $1-\alpha$ называется *доверительным уровнем*, а наименьшее значение левой части неравенства (1) по всем $\theta \in \Theta$ – *доверительным коэффициентом.* В случае $\Theta \subseteq \mathrm{R}$ доверительная область вида $\Delta_n = \left(\underline{\theta}_{\,n}(X^{(n)});\, \overline{\theta}_n(X^{(n)})\right)$ называется *доверительным интервалом*, в котором различаются *нижний* $\underline{\theta}_{\,n}$ и *верхний* $\overline{\theta}_n$ *доверительные пределы.* Доверительные интервалы вида $(\underline{\theta}_{\,n};\, \infty)$ и $(-\infty;\, \overline{\theta}_n)$ называются соответственно *нижней* и *верхней доверительными границами.*

Естественно, конфигурация доверительной области выбирается статистиком, сообразуясь с ее геометрической наглядностью и, главное, возможностью гарантировать доверительную вероятность. В случае скалярного параметра доверительная область обычно выбирается в виде интервала, причем в ряде случаев, например, при оценке надежности или вероятности нежелательного события, в виде одностороннего интервала. В случае многомерного параметра обычно строятся доверительные эллипсоиды или параллелепипеды.

Следует обратить особое внимание на правильную формулировку доверительного утверждения, которая подчеркивается в неравенстве (1) записью $\Delta_n(X^{(n)}) \ni \theta$ вместо обычного $\Delta_n(X^{(n)}) \in \theta$. Говорить, что значение параметра $\theta$ с вероятностью, не меньшей $1-\alpha$, принадлежит области $\Delta_n$, значит сознательно вводить трудящихся на ниве прикладной статистики в заблуждение. Дело в том, что значение параметра $\theta$ в данной вероятностной модели не является случайной величиной, это постоянная, свойственная исследуемому объекту, а постоянная принадлежит какой-либо области только с вероятностью единица или ноль. Вся случайность заключена в самой доверительной области $\Delta_n(X^{(n)})$, и поэтому правильное доверительное утверждение гласит: *область* $\Delta_n(X^{(n)})$ *с вероятностью, не меньшей* $1-\alpha$, *накрывает истинное (неизвестное) значение* $\theta$.

В самом начале нашего курса математической статистики в примере 1.1 с определением содержания общей серы в дизельном топливе мы строили доверительный интервал фиксированной ширины для среднего значения нормального распределения, когда занимались планированием объема испытаний, необходимого для достижения заданной точности и надежности оценки. Рассмотрим еще раз этот пример в свете введенных понятий интервальной оценки параметра.

$1^0$. Доверительный интервал для среднего значения нормального распределения при известной дисперсии. Итак, в примере 1.1 мы имели дело с выборкой $X^{(n)}$ из нормального $(\mu, \sigma)$ распределения, причем значение параметра $\sigma$ нам было известно, так что в качестве неизвестного параметра $\theta$ выступало $\mu$. Наша задача состоит в построении такого интервала $\left(\underline{\mu}_n(X^{(n)}), \overline{\mu}_n(X^{(n)})\right)$, что $P_\mu\left(\underline{\mu}_n \le \mu \le \overline{\mu}_n\right) \ge 1-\alpha$, при любом значении $\mu \in \mathrm{R}$.

Напомним, что в этом примере оценкой $\mu$ служило выборочное среднее $\overline{X}$ – несмещенная оценка $\mu$ с минимальным квадратичным риском. Эта линейная оценка обладает замечательным свойством инвариантности: распределение разности $\overline{X}-\mu$ не зависит от $\mu$, и это обстоятельство подсказывает нам путь к построению доверительного интервала. Действительно,

$$P\left(\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma}\sqrt{n}\,\leq\,\lambda\right)=2\Phi(\lambda)-1,$$

и если положить $\lambda$ равным корню уравнения $2\Phi(\lambda)-1=1-\alpha$, то есть выбрать $\lambda=\lambda_\alpha=\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, то интервал $(\overline{X}-\lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n},\ \overline{X}+\lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n})$ будет $(1-\alpha)$-доверительным интервалом для среднего значения $\mu$ нормального $(\mu,\,\sigma^2)$ распределения при известной дисперсии $\sigma^2$.

В этом простейшем примере на построение доверительного интервала ключевым моментом было использование *инвариантной* случайной функции $\hat{\theta}_n-\theta$ от оценки $\hat{\theta}_n=\overline{X}$ и параметра $\theta=\mu$. В принципе, именно на подобном выборе *опорной* функции $H(\hat{\theta}_n,\,\theta)$ с подходящей оценкой $\hat{\theta}_n$ параметра $\theta$ основаны исторически первые методы построения доверительных интервалов и множеств.  порная функция $H(\,\cdot,\,\cdot\,)$ подбирается таким образом, чтобы она была монотонно возрастающей функцией второго аргумента $\theta$, и при этом вероятность $P_\theta\left(H(\hat{\theta}_n(X^{(n)}),\,\theta)\leq\lambda\right)$ для некоторых значений $\lambda$ должна оставаться достаточно высокой (близкой к единице), каково бы ни было значение $\theta\in\Theta$. Мы проиллюстрируем этот метод построения доверительных интервалов с помощью подбора инвариантных опорных функций на примере нормального $(\mu,\sigma^2)$ распределения, строя доверительные интервалы для каждого из параметров при известном и неизвестном значениях другого (“мешающего”) параметра.

$2^0$. Верхняя доверительная граница для дисперсии нормального распределения при известном среднем. При выборе из нормального $(\mu,\,\sigma^2)$ распределения с известным средним значением $\mu$ метод максимального правдоподобия приводит к несмещенной оценке $\hat{\sigma}_n^2=n^{-1}\sum_1^n(X_k-\mu)^2$ параметра $\sigma^2$. Используя результаты предыдущего параграфа, нетрудно показать, что $\hat{\sigma}_n^2$ есть несмещенная оценка с равномерно минимальным риском.

Поскольку, в чем мы неоднократно убеждались, $Y_k=(X_k-\mu)/\sigma\sim\mathcal{N}(0,\,1),\ k=1,\ldots,n$, то естественно рассмотреть в качестве опорной функцию $H(\hat{\sigma}_n^2,\,\sigma^2)=\sigma^{-2}\sum_1^n(X_k-\mu)^2$. Найдем ее распределение.

**Лемма 6.1.** *Если $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы и одинаково распределены по стандартному нормальному закону $\mathcal{N}(0,\,1)$, то $\sum_1^n Y_k^2$ имеет гамма-распределение $\mathrm{G}(n/2,\,2)$.*

Доказательство.. Покажем, что $Y^2$, где $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, имеет гамма-распределение $\mathrm{G}(1/2,\,2)$, после чего просто воспользуемся теоремой сложения для гамма-распределения (см. предложение 12.2, пункт $5^0$ курса ТВ). Функция распределения $Y^2$ вычисляется по формуле $F(x) = P(Y^2 < x) = P(-\sqrt{x} < Y < \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, так что ее функция плотности

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} - 1\right] = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}x^{1/2-1}\mathrm{e}^{-x/2},$$

поскольку $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Мы видим, что это – функция плотности гамма-распределения $\mathrm{G}(1/2,\,2)$ с параметром формы $\lambda = 1/2$ и параметром масштаба $a = 2$, откуда, как было замечено выше, немедленно следует утверждение леммы.

Гамма-распределение $\mathrm{G}(n/2,\,2)$ очень часто используется в различных задачах математической статистики, и оно появилось раньше, чем гамма-распределение $\mathrm{G}(\lambda,\,a)$ общего вида, под названием *хи-квадрат распределение с $n$ степенями свободы*. Функция распределения хи-квадрат обычно обозначается $K_n(x),\ x > 0$, а что касается термина “степени свободы”, то его смысл прояснится по мере других применений хи-квадрат распределения.

Теперь мы можем перейти к нашей основной задаче – построению доверительных границ для $\sigma^2$. Если обратиться к практической стороне этой проблемы (см. в связи с этим пример 1.1), то легко понять, что статистика должна интересовать только верхняя (а не двусторонняя) граница $\sigma^2$, на которую он будет ориентироваться, чтобы обезопасить себя от грубых ошибок при планировании статистического эксперимента. Таким образом, мы должны сформулировать доверительное утверждение в форме $\sigma^2 \le \overline{\sigma}_n^2$. Понятно, что нижняя доверительная граница и двусторонние границы (доверительный интервал), коль скоро они кому-то потребуются, строятся аналогичным образом.

В рамках такой формулировки задачи, мы должны рассмотреть

событие
$$A_\lambda = \left\{ H(\hat\sigma_n^2,\, \sigma^2) = \frac{\sum_1^n (X_k-\mu)^2}{\sigma^2} \;\ge\; \lambda \right\},$$
выбирая $\lambda$ из условия $P_{\mu,\sigma}(A_\lambda) = 1-\alpha$. Как мы только что выяснили, эта вероятность не зависит от $\mu$ и $\sigma$, и в силу леммы 6.1 постоянная $\lambda$ определяется квантилью хи-квадрат распределения с $n$ степенями свободы – корнем уравнения $1-K_n(\lambda) = 1-\alpha$. Следовательно, верхняя $(1-\alpha)$-доверительная граница для $\sigma^2$ равна $\sum_1^n (X_k-\mu)^2/K^{-1}(\alpha)$, где, в соответствии с нашими стандартными обозначениями, $K^{-1}(\alpha)$ есть $\alpha$-квантиль хи-квадрат распределения с $n$ степенями свободы.

Используемые в рассмотренных примерах методы подбора опорных функций, основанные на принципе инвариантности статистик (оценок параметров $\mu$ и $\sigma^2$) относительно линейных преобразований, позволяют аналогичным образом подбирать такие функции и в случае неизвестных значений мешающего параметра. Так, если рассматривается задача построения доверительных границ для $\sigma^2$ при неизвестном $\mu$, то естественно обратиться к оценке $S^2 = n^{-1}\sum_1^n (X_k - \overline{X})^2$ параметра $\sigma^2$, замечая, что ее распределение не зависит от $\mu$, поскольку каждая из разностей $X_k - \overline{X}$ инвариантна относительно сдвига, когда $X_k$ заменяется на $X_k - \mu,\ k = 1,\ldots,n$. Если разделить эти разности на $\sigma$, то мы получим случайные величины, распределение которых не зависит как от $\mu$, так и от $\sigma$, и таким образом мы приходим к инвариантной опорной функции $H(S^2,\sigma^2) = S^2/\sigma^2$. Для вывода распределения этой функции можно обратиться к нормальным $(0,1)$ случайным величинам $Y_k = (X_k-\mu)/\sigma,\ k=1,\ldots,n$, поскольку, в чем легко убедиться, $H(S^2,\sigma^2) = n^{-1}\sum_1^n (Y_k - \overline{Y})^2$.

Если обратиться к задаче доверительной интервальной оценки $\mu$ при неизвестном значении $\sigma$, то здесь инвариантную опорную функцию можно построить, комбинируя ее из опорных функций задач $1^0$ и $2^0$. Как мы видели при решении этих задач, распределения случайных величин $(\overline{X}-\mu)/\sigma$ и $S/\sigma$ не зависят от $\mu$ и $\sigma$, и поэтому в качестве опорной функции при интервальной оценке $\mu$ можно использовать опорную функцию, определяемую отношением этих величин, то есть функцию $|\,\overline{X}-\mu\,|/S$.

днако для построения доверительных интервалов на основе таких функций нам необходимо найти совместное распределение статистик $\overline{X}$ и $S^2$. Мы получим это распределение в следующей лекции, сформулировав его в виде утверждения, известного в математической статистике как *лемма Фишера.*

*Лекция 10*

**Теорема 6.1.** *В случае выбора из нормального* $(\mu,\, \sigma^2$ *распределения статистики* $\overline{X}$ *и* $S^2$ *независимы,* $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2/n)$, *а* $nS^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$ *(имеет хи-квадрат распределение с* $n-1$ *степенью свободы).*

Доказательство.. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – случайная выборка из стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0,\, 1)$. Покажем, что статистики

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad и \quad S_Y = \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \overline{Y})^2$$

независимы, $\overline{Y} \sim \mathcal{N}(0,\, 1/n)$, а $S_Y \sim \chi^2_{n-1}$. Тогда утверждение теоремы будет следовать из того факта, что $\sigma Y_k + \mu$ имеют то же распределение, что и $X_k,\ k = 1, \ldots, n$, и, следовательно, распределение $\overline{X}$ совпадает с распределением $\sigma\overline{Y} + \mu$, а распределение $S_Y$ – с распределением $nS^2/\sigma^2$.

Введем случайные величины

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} Y_i,\ k = 1, \ldots, n,$$

которые определяются заданием матрицы $\mathrm{C} = \|\, c_{ki} \,\|$ линейных преобразований случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$. Пусть элементы первой строки этой матрицы $c_{11} = \ldots = c_{1n} = 1/\sqrt{n}$, а остальные элементы матрицы C выберем так, чтобы произведение C на транспонированную матрицу $\mathrm{C}'$ было единичной матрицей: $\mathrm{CC}' = \mathrm{I}$. Как известно, такой выбор C возможен, и полученная таким образом матрица называется ортонормированной. Случайные величины $Z_1, \ldots, Z_n$ распределены в соответствии с $n$-мерным нормальным законом, для спецификации которого достаточно найти вектор средних значений этих величин и матрицу их ковариаций.

Средние значения

$$m_k = \mathbf{E} Z_k = \mathbf{E} \sum_{i=1}^{n} c_{ki} Y_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} \mathbf{E} Y_k = 0,\ k = 1, \ldots, n.$$

Далее, поскольку средние значения равны нулю, ковариации этих случайных величин

$$\operatorname{cov}(Z_k,\, Z_j) = \mathbf{E}(Z_k - m_k)(Z_j - m_j) = \mathbf{E}Z_kZ_j = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} c_{ki}Y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} c_{ji}Y_i =$$

$$\mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} c_{ki}c_{ji}Y_i^2 + \mathbf{E}\sum_{i\neq l} c_{ki}c_{jl}Y_iY_l.$$

Если занести математические ожидания под знаки сумм и вспомнить, что $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы, $\mathbf{E}Y_i = 0$, $\mathbf{E}Y_i^2 = \mathbf{D}Y_i = 1$, а при $i \neq l$ средние значения $\mathbf{E}Y_iY_l = \mathbf{E}Y_i\mathbf{E}Y_l = 0$, то получим, что

$$\operatorname{cov}(Z_k,\, Z_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}c_{ji}, \quad k, j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку для ортонормированной матрицы последняя сумма равна нулю, если $k \neq j$, и равна единице, если $k = j$, то мы приходим к заключению, что $Z_1, \ldots, Z_n$ независимы и одинаково распределены по стандартному нормальному закону $\mathcal{N}(0,\, 1)$. Таким образом, ортонормированные преобразования случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$ не изменили их совместное распределение.

Теперь представим наши статистики $\overline{Y}$ и $S_Y$ в терминах случайных величин $Z_1, \ldots, Z_n$. Поскольку

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{n} c_{1i}Y_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

то $\overline{Y} = Z_1/\sqrt{n}$. Далее, ортонормированное линейное преобразование сохраняет сумму квадратов компонент преобразуемого вектора, то есть $\sum_1^n Z_k^2 = \sum_1^n Y_k^2$. Следовательно, статистика $S_Y$ в новых переменных приобретает вид

$$\frac{S_Y}{n} = \frac{1}{n}\sum_1^n Y_k^2 - \overline{Y}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n Z_k^2 - \frac{Z_1^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_2^n Z_k^2.$$

Итак, распределение $\overline{Y}$ совпадает с распределением $Z_1/\sqrt{n}$, а распределение $S_Y$ – с распределением суммы квадратов $n-1$ независимых в совокупности и независящих от $Z_1$ нормальных $(0,\, 1)$ случайных величин. Следовательно, $\overline{Y}$ и $S_Y$ независимы, $\overline{Y} \sim \mathcal{N}(0,\, 1/n)$, $S_Y \sim \chi^2_{n-1}$ (см. лемму 6.1), и “лемма Фишера” доказана.

Установив совместное распределение выборочного среднего и выборочной дисперсии в случае выбора из нормального распределения, мы можем приступить к построению доверительных интервалов для каждого из параметров $\mu$ и $\sigma$ при неизвестном значении другого параметра.

$3^0$. Верхняя доверительная граница для дисперсии нормального распределения при неизвестном среднем. Эта граница находится наиболее просто, поскольку распределение опорной функции

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_1^n (X_k - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{X_k - \mu}{\sigma} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_1^n (Y_k - \overline{Y})^2 \tag{2}$$

есть хи-квадрат распределение с $n-1$ степенью свободы (см. теорему 6.1). Следовательно, верхняя $(1-\alpha)$-доверительная граница определяется квантилью $\lambda_\alpha = K^{-1}(\alpha)$ хи-квадрат распределения – корнем уравнения

$$P(nS^2/\sigma^2 \geq \lambda) = 1 - K_{n-1}(\lambda) = 1 - \alpha,$$

и доверительное утверждение $\sigma^2 \leq \overline{\sigma}_n^2 = nS^2/K_{n-1}^{-1}(\alpha)$ выполняется с заданной вероятностью $1-\alpha$.

$4^0$. Доверительный интервал для среднего значения нормального распределения при неизвестной дисперсии. В этой задаче мы имеем дело с двусторонними доверительными границами (доверительным интервалом), и в соответствии с выбором опорной функции $|\,\overline{X} - \mu\,|/S$, о которой мы говорили перед доказательством теоремы 6.1, нам потребуется знание вероятности события вида $|\,\overline{X} - \mu\,|/S \leq \lambda$.

В начале XIX века английский математик В.Госсет, писавший под псевдонимом “Стьюдент” (Student), нашел распределение случайной величины $T_\nu = \xi\sqrt{\nu}/\sqrt{\chi_\nu^2}$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, а $\chi_\nu^2$ – случайная величина, не зависящая от $\xi$ и распределенная по закону хи-квадрат с $\nu$ степенями свободы. Естественно, его исследования были связаны с проблемами статистического вывода о среднем значении $\mu$ нормального распределения при неизвестной дисперсии, и Стьюдент искал распределение опорной функции (см. (2) в связи с переходом в записи опорной функции в терминах $X_k$ к $Y_k$)

$$H = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n Y_k}{\sqrt{\sum_1^n (Y_k - \overline{Y})^2}}\sqrt{n-1},$$

$$Y_k = \frac{X_k - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,\, 1),\ k = 1, \ldots, n,$$

которая отличается от выбранной нами опорной функции только множителем $\sqrt{n-1}$, и поэтому также может быть использована в построении доверительного интервала для $\mu$ при неизвестном $\sigma$. То, что распределения $T_\nu$ и $H$ совпадают, следует из теоремы 6.1: случайная величина в знаменателе $\xi = \sum_1^n Y_k/\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$ не зависит от $\sum_1^n (Y_k - \overline{Y})^2 \sim \chi^2_{n-1}$, разделив которую на значение степени свободы $n-1$, получаем $\frac{1}{\nu}\chi^2_\nu$ с $\nu = n-1$.

Найдем распределение случайной величины $T$, которое называется *распределением Стьюдента с $\nu$ степенями свободы* или
*$t$-распределением.* Совместная функция плотности независимых случайных величин $\xi$ и $\eta = \chi^2_\nu$ равна

$$f(u,\, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} v^{\nu/2-1} \exp\left\{-\frac{v}{2}\right\},$$

так что функция распределения случайной величины $T_\nu$

$$\mathrm{S}_\nu(x) = P(\xi\sqrt{\nu/\eta} < x) =$$

$$\iint\limits_{u\sqrt{\nu} < \sqrt{v}x} f(u,\, v)\, du\, dv = \int\limits_0^\infty dv \int\limits_{-\infty}^{x\sqrt{v/\nu}} f(u,\, v)\, du.$$

Дифференцируя это выражение по $x$, находим функцию плотности распределения Стьюдента

$$\mathrm{s}_\nu(x) = \int\limits_0^\infty \sqrt{v/\nu} f(x\sqrt{v/\nu},\, v)\, dv =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}2^{(\nu+1)/2}\Gamma(\nu/2)} \int\limits_0^\infty v^{\frac{\nu+1}{2}-1} \exp\left\{-\frac{v}{2}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)\right\} dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Вид полученной функции плотности говорит о том, что распределение Стьюдента можно трактовать как обобщение стандартного ($a = 0$, $b = 1$) распределения Коши $\mathrm{C}(a, b)$, которое получается из распределения Стьюдента при числе степеней свободы $\nu = 1$. Это симметричное распределение, и поэтому $\mathrm{S}_\nu(-x) = 1 - \mathrm{S}_\nu(x)$, что позволяет нам довольно просто построить доверительный интервал для $\mu$ с помощью квантили распределения $\mathrm{S}_{n-1}(\cdot)$ :

$$P(|\,T_{n-1}\,| \leq t) = \mathrm{S}_{n-1}(t) - \mathrm{S}_{n-1}(-t) = 2\mathrm{S}_{n-1}(t) - 1 = 1 - \alpha,$$

откуда $t_\alpha = \mathrm{S}_{n-1}^{-1}(1 - \alpha/2)$, и $(1-\alpha)$-доверительный интервал для $\mu$ определяется пределами $\overline{X} \pm St_\alpha/\sqrt{n-1}$.

Итак, мы построили доверительные пределы для параметров $\mu$ и $\sigma^2$ нормального распределения. Таблицы нормального, хи-квадрат и стьюдентского распределений, а также квантилей этих распределений, необходимые для численной реализации доверительных оценок, смотрите в книге Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики, М.: Наука, 1983, которая в дальнейшем будет цитироваться как ТМС. Еще раз отметим, что возможность доверительной оценки этих параметров определялась, в основном, инвариантностью семейства нормальных распределений относительно линейной группы преобразований. Точно так же мы можем построить доверительные пределы для параметра $\theta$ показательного распределения или для параметра масштаба гамма распределения при известном параметре формы; мы вернемся к этим задачам позднее при обсуждении проблемы оптимизации доверительной оценки. Что же касается других распределений, то здесь проблема осложняется отсутствием инвариантных опорных функций и невозможностью получить распределение оценок параметра, для которого строятся доверительные пределы, в явном виде. Тем не менее существует достаточно общий подход к данной проблеме, основанный на асимптотической нормальности распределения оценок по методу моментов или методу максимального правдоподобия.

Пусть $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X^{(n)})$ – асимптотически нормальная со средним $\theta$ и дисперсией $\sigma^2(\theta)/n$ оценка параметра $\theta$ (например, при определенных условиях регулярности (см. теорему 4.2) оценка максимального правдоподобия асимптотически нормальна со средним $\theta$ и дисперсией

$[\,nI(\theta)\,]^{-1})$. Тогда при $n \to \infty$ вероятность

$$P_\theta\left(\frac{|\,\hat{\theta}_n - \theta\,|}{\sigma(\theta)}\sqrt{n} \,\le\, \lambda_\alpha\right) \longrightarrow 1-\alpha,$$

при любом $\theta \in \Theta$, если $\lambda_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, и мы получаем *асимптотически* $(1-\alpha)$-доверительное множество

$$\Delta_n(X^{(n)}) = \left\{\theta :\ \frac{|\,\hat{\theta}_n - \theta\,|}{\sigma(\theta)}\sqrt{n} \,\le\, \lambda_\alpha\right\}\bigcap\Theta.$$

Если $\Delta_n$ есть интервал на прямой R, то мы решили задачу интервальной оценки параметра $\theta$. Если же это некоторое вычурное и непригодное к употреблению подмножество R, то можно пойти на дальнейшие упрощения асимптотического утверждения, заменив в определении $\Delta_n$ параметрическую функцию $\sigma(\theta)$ на ее оценку $\sigma(\hat{\theta}_n)$. Достаточно потребовать непрерывность функции $\sigma(\theta),\ \theta \in \Theta$, чтобы, ссылаясь на теорему Слуцкого (предложение 11.1 курса ТВ с $\xi_n \propto \sigma(\hat{\theta}_n) \underset{P}{\to} \sigma(\theta)$), утверждать, что при $n \to \infty$

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_n - \frac{\lambda_\alpha\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}} \,\le\, \theta \,\le\, \hat{\theta}_n + \frac{\lambda_\alpha\sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 1-\alpha.$$

Проиллюстрируем “работу” этого метода на двух полезных в практическом отношении примерах.

$5^0$. Асимптотически доверительный интервал для вероятности успеха в испытаниях Бернулли. В схеме испытаний Бернулли – выборе из распределения бинарной случайной величины $X$, принимающей значение 1 (“успех”) с вероятностью $p$ и значение 0 (“неудача”) с вероятностью $1-p$, оптимальной несмещенной оценкой $p$ является выборочное среднее $\overline{X} = n^{-1}\sum_1^n X_k$ или, что то же, относительная частота успешных исходов в $n$ испытаниях. Статистика $n\overline{X}$ имеет биномиальное распределение $\mathrm{B}(n,\,p)$, и это позволяет насчитать таблицы доверительных пределов для $p$ при различных значениях доверительного уровня $1-\alpha$, объема выборки $n$ и числа успешных исходов $n\overline{x}$ (см., например, ТМС). Что же дает асимптотический подход к построению доверительных интервалов?

Выборочное среднее асимптотически нормально со средним $p$ и дисперсией $p(1-p)/n$. Следовательно, $(1-\alpha)$-доверительная область

$\Delta_n = \left\{p :\ 0 \le p \le 1,\ |\,\overline{X} - p\,| \le \lambda_\alpha \sqrt{p(1-p)/n}\right\}$. Разрешая неравенства в фигурных скобках относительно $p$, получаем доверительный интервал

$$\frac{n}{n+\lambda_\alpha^2}\left(\overline{X} + \frac{\lambda_\alpha^2}{2n} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n} + \frac{\lambda_\alpha^2}{4n^2}}\right),$$

который при больших объемах испытаний $n$ мало отличается от доверительного интервала $\overline{X} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}$, полученного заменой $\sigma^2(p) = p(1-p)$ на ее оценку $\overline{X}(1-\overline{X})$ :

$6^0$. Асимптотически доверительный интервал для параметра интенсивности распределения Пуассона. Распределение Пуассона $\mathrm{P}(\theta)$ с функцией плотности (по считающей мере) $f(x\,|\,\theta) = P_\theta(X = x) = \theta^x \mathrm{e}^\theta / x!,\ x = 0, 1, 2, \ldots$, индексируется положительным параметром $\theta$, оптимальная несмещенная оценка которого по выборке $X^{(n)}$ объема $n$, как и в предыдущем примере, определяется выборочным средним $\overline{X}$. Для распределения Пуассона также справедлива теорема сложения: $n\overline{X} \sim \mathrm{P}(n\theta)$, и на основе этого можно построить точные доверительные пределы для $\theta$, таблица которых имеется в упомянутом сборнике ТМС. Но оценка $\overline{X}$ асимптотически нормальна $(\theta,\ \theta/n)$, что позволяет определить асимптотически доверительную область $\Delta_n = \{\theta :\ \theta > 0,\ |\,\overline{X} - \theta\,| \le \lambda_\alpha \sqrt{\theta/n}\}$. Решение неравенств в фигурных скобках относительно $\theta$ дает асимптотически доверительный интервал

$$\overline{X} + \frac{\lambda_\alpha^2}{2n} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X}}{n} + \frac{\lambda_\alpha^2}{4n^2}}\,.$$

Наконец, заменяя $\sigma^2(\theta) = \theta$ ее оценкой $\overline{X}$, получаем также асимптотически доверительный, но, как показывают числовые расчеты, менее точный интервал $\overline{X} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\overline{X}/n}$ .

На этом мы заканчиваем изложение простейших методов построения доверительных и асимптотически доверительных интервалов на основе подбора опорных функций. проблеме оптимального интервального оценивания мы поговорим позднее, изучив теорию оптимальной проверки гипотез – высказываний о возможных значениях параметра $\theta$. ставшиеся лекции будут посвящены именно этой теории.