

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ПОНЯТИЕ
ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Составитель

доцент Е. П. Аксентьева

Методические указания

для студентов II курса

ФАКУЛЬТЕТА ГЕОГРАФИИ И ГЕОЭКОЛОГИИ

КАЗАНЬ

2010

Пособие составлено для студентов второго курса факультета географии и геоэкологии по специальности 021.300 "Картография и геоинформатика", состоит из методических разработок пяти тем. В каждой приводятся основные понятия и определения, разбираются типичные примеры, даются задачи. Предлагается задание для подготовки к контрольной работе. Используя пособие, студенты имеют возможность изучить предлагаемые темы самостоятельно.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Понятие комплексного числа. Действия над комплексными числами.....	3
2. Показательная форма комплексного числа. Линии и области на комплексной плоскости	5
3. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.....	8
4. Понятие функции комплексного переменного.....	9
5. Некоторые сведения о многочленах.....	11
Ответы.....	14

ТЕМА 1

ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Определение. *Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Число x называется вещественной или действительной частью комплексного числа и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, y называется мнимой частью комплексного числа и обозначается $y = \operatorname{Im} z$.*

Обозначение Re произошло от латинского слова *realis* – действительный, а Im – от *imaginarius* (мнимый).

Множество комплексных чисел \mathbb{C} в качестве подмножества содержит множество \mathbb{R} вещественных чисел, т.к. при $y = 0$ получим $z = x$.

Форма комплексного числа $z = x + iy$ называется его *декартовой* формой.

Число z равно 0 тогда и только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$.

Число $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно-сопряженным с z .

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

По определению: равенство $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Рассмотрим действия над комплексными числами z_1, z_2 :

сумма $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$,

разность $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$,

произведение комплексных чисел вводится как произведение двучленов с учетом того, что $i^2 = -1$: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$.

Например, $z\bar{z} = x^2 + y^2$ – вещественное число.

Деление комплексных чисел: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{1}{z_2 \bar{z}_2} z_1 \bar{z}_2 = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} z_1 \bar{z}_2$, т.е. деление свелось к произведению комплексных чисел.

Примеры. 1) Пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + i$. Тогда имеем

$$z_1 + z_2 = 2 - 3i + 1 + i = 3 - 2i, \quad z_1 - z_2 = 2 - 3i - 1 - i = 1 - 4i,$$

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + i) = 2 - 3i + 2i - 3i^2 = 5 - i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.$$

2) Решим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$.

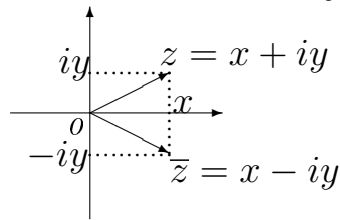
$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{9}\sqrt{-1} = 2 \pm 3i$$

Здесь дискриминант $D < 0$, $x_2 = \bar{x}_1$, т.е. корни комплексно-сопряжённые, и имеет место равенство

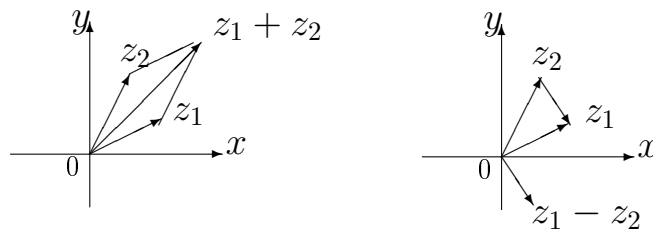
$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = x^2 - 4x + 13.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

По определению комплексное число задаётся двумя вещественными числами (x, y) . В свою очередь два вещественных числа определяют точку в декартовой системе координат. Эта точка (ее тоже будем называть z), а также радиус-вектор $\vec{oz} = \{x, y\}$ дают геометрическую интерпретацию комплексного числа. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью z . На этой плоскости ось ox называется вещественной осью, а ось oy — мнимой осью, т.к. вещественные числа $z = x$ изображаются точками оси ox , а числа $z = iy$ (их называют "чисто" мнимыми) — точками на оси oy .



Если использовать операции сложения и вычитания векторов $\vec{oz}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\vec{oz}_2 = \{x_2, y_2\}$: $\vec{oz}_1 \pm \vec{oz}_2 = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2\}$, то сложению и вычитанию комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ можно дать геометрическую интерпретацию:



ЗАДАЧИ

1 Изобразить на комплексной плоскости комплексные числа z и сопряженные к ним:

$$z_1 = 1 - 2i, z_2 = -3 - 4i, z_3 = 2i, z_4 = -\sqrt{3} + i, z_5 = 3, z_6 = -8, \\ z_7 = -5i, z_8 = 3 + 4i.$$

2 Выполнить арифметические действия над комплексными числами (с геометрической интерпретацией $z_1 \pm z_2$).

$$1) z_1 = -1 + 3i, z_2 = 2 + 4i, 2) z_1 = 3 - 2i, z_2 = -1 + 5i,$$

$$3) z_1 = 2i, z_2 = 1 + i, 4) z_1 = 2 - i, z_2 = 5i,$$

3 Вычислить:

$$1) (3 - 2i)^2, 2) (1 + i)^3, 3) i^{2011}, 4) (-i)^{2012}.$$

4 Решить уравнения:

$$1) x^2 + 25 = 0, 2) x^2 + 49 = 0,$$

$$3) x^2 - 2x + 5 = 0, 4) x^2 + 4x + 13 = 0,$$

$$5) x^2 - 4x + 7 = 0, 6) x^2 - 2x + 2 = 0.$$

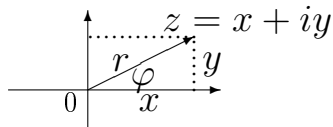
ТЕМА 2

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ЛИНИИ И ОБЛАСТИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Умножению комплексных чисел не соответствуют ни скалярное, ни векторное произведения векторов. Чтобы выяснить геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел, перейдем к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической*. Если воспользоваться формулой Эйлера (ее доказательство даётся в разделе "Числовые ряды") $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, то получим *показательную* форму комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Полярные радиус r и угол φ для комплексного числа z называются: $r = |z|$ — модуль комплексного числа, $\varphi = \text{Arg } z$ — аргумент комплексного

числа z .



$\text{Arg } z$ является многозначной функцией. Ее значения для данного z отличаются одно от другого на целое кратное 2π . Для $z = 0$ аргумент не определен. Обычно используют главное значение аргумента $\arg z$, определяемое дополнительным условием $-\pi < \arg z \leq \pi$. Тогда $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Если $z = x + iy$, то найти $|z|$ и $\arg z$ можно так: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$, откуда $\arg z = \text{arctg} \frac{y}{x}$, если z в первой или четвёртой четвертях; $\arg z = \text{arctg} \frac{y}{x} + \pi$, если z во второй четверти, $\arg z = \text{arctg} \frac{y}{x} - \pi$, если z в третьей четверти. Заметим, что $\arg z = \pi/2$ (или $-\pi/2$), если $x = 0$, $y > 0$ (или $y < 0$).

Пример. ПРЕДСТАВИТЬ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО $z = -2 + 3i$ В ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ.

Здесь $r = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, $\text{tg } \varphi = -3/2$. Отсюда, т.к. z находится во второй четверти, то $\varphi = -\text{arctg}(3/2) + \pi$. Поэтому $z = \sqrt{13} e^{[-\text{arctg}(3/2) + \pi]i}$.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2, \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

(Здесь мы поступили по аналогии с действием умножения двух значений показательной функции вещественного переменного: $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$. Строгое доказательство этого равенства получится, если использовать тригонометрическую форму комплексных чисел).

Аналогично получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Итак, у произведения $z_1 z_2$ модуль равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей. У частного $\frac{z_1}{z_2}$ модуль равен от-

ношению модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя. Это позволяет геометрически их построить.

В частности, умножение вектора z на $e^{i\varphi}$ означает его поворот на угол φ вокруг начала координат.

З А Д А Ч И

5 Изобразить на комплексной плоскости комплексные числа в показательной форме :

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{2}}, \quad z_3 = e^{-\frac{3\pi i}{4}}, \quad z_4 = 4e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad z_5 = 5e^{\frac{\pi i}{6}}, \quad z_6 = e^{-\frac{\pi i}{6}}.$$

6 Найти и изобразить на комплексной плоскости произведения $w_1 = z_1 z_3$, $w_2 = z_2 z_4$, $w_3 = z_1 z_5$, $w_4 = z_2 z_6$ (см. **5**).

7 Представить комплексные числа в декартовой форме, применив формулу Эйлера:

$$z_1 = e^{2+3i}, \quad z_2 = e^{-1+3i}, \quad z_3 = e^{4i}, \quad z_4 = e^{-5i}.$$

8 Представить комплексные числа в показательной форме (взяв главные значения аргумента):

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = -\sqrt{3} + i, \quad z_4 = \sqrt{3} - i, \\ z_5 = -5i, \quad z_6 = 6i, \quad z_7 = -64, \quad z_8 = 4.$$

9 Каков геометрический смысл выражения $|z_1 - z_2|$?

10 Определить кривые и построить их:

- 1) $|z - a| = r$, 2) $|z - 2| + |z + 2| = 5$, 3) $|z + i| = 2$,
 4) $|z - 1 + i| = 3$, 5) $z = 3e^{it}, 0 \leq t \leq \pi$, 6) $z = z_1 + (z_2 - z_1)t, 0 \leq t \leq 1$,
 7) $|z| = 1 - \operatorname{Re} z$, 8) $z = 2 + 3e^{it}, -\pi \leq t \leq 0$.

11 Построить геометрические места точек по условиям:

- 1) $|z - a| < r$, 2) $|z| < 2, \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$, 3) $|z| < 3$, 4) $|z| > 3$,
 5) $|z - i| < 1$, 6) $|z + 1 - i| < 2$, 7) $|z + e^{i\frac{\pi}{4}}| > 1$, 8) $|z - e^{-i\frac{\pi}{4}}| > 2$,
 9) $2 < |z| < 4, -\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}$, 10) $0 < \operatorname{Re} z < 2$,
 11) $-\infty < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi$, 12) $1 < \operatorname{Re} z < +\infty, \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi$.

ТЕМА 3

ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ . ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

При возведении числа $z = re^{i\varphi}$ в степень $n \in \mathbb{N}$ как следствие из умножения комплексных чисел имеем:

$z^n = r^n e^{in\varphi}$. При $r = 1$ отсюда получаем формулу Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

Рассмотрим извлечение корня из комплексного числа, т.е. найдем $z = \sqrt[n]{w}$, где комплексное число w задано. Представим w в показательной форме $w = \rho e^{i\theta}$, а z будем искать в показательной форме $z = re^{i\varphi}$. Из равенства $z^n = w$ имеем $r^n e^{i\varphi n} = \rho e^{i\theta}$. Отсюда, учитывая (1), получим

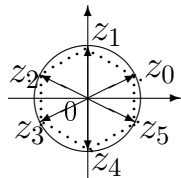
$$r^n = \rho, \quad \varphi n = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тогда $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Существенно различных углов здесь будет всего n , т.е. $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Все остальные углы отличаются от этих на угол, кратный 2π . Поэтому различных значений $\sqrt[n]{w}$ будет n :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пример. Извлечь корень из комплексного числа, дать геометрическую интерпретацию: $\sqrt[6]{-64}$.

Из равенства $z = \sqrt[6]{-64}$ имеем $z^6 = -64 = 64e^{(2k+1)\pi i}$, $k = \overline{0, 5}$. Отсюда $z_k = \sqrt[6]{64} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{6}} = 2e^{\frac{(2k+1)\pi i}{6}}$. Все числа z_k по модулю равны 2 и, следовательно, лежат на окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Точка $z_0 = 2e^{\pi i/6}$, каждая последующая точка получается из предыдущей поворотом на угол $\pi/3$. Если соединить точки z_k , получим правильный шестиугольник.



ЗАДАЧИ

12 Возвести в степень комплексные числа (см. **8**):

1) z_1^4 , 2) z_2^6 , 3) z_3^8 , 4) z_4^5 .

13 Извлечь корень из комплексного числа, дать геометрическую интерпретацию:

1) $\sqrt{6i}$, 2) $\sqrt[6]{-64i}$, 3) $\sqrt[3]{1-i}$, 4) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$, 5) $\sqrt{-i}$, 6) $\sqrt[3]{1}$,
7) $\sqrt[5]{32(1+\sqrt{3}i)}$, 8) $\sqrt[3]{-8}$.

14 Решить уравнения:

1) $z^8 - 1 = 0$, 2) $z^3 + 1 = 0$, 3) $z^5 + 1 - i = 0$, 4) $z^3 + i = 0$.

15 Используя формулу Муавра, доказать, что

1) $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$,

2) $\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$, $\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$.

ТЕМА 4

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рассмотрим некоторые элементарные функции комплексного переменного.

1. Линейная функция определяется соотношением

$w = az + b$, где a, b – фиксированные комплексные числа, а z – комплексное переменное. Она взаимно-однозначно отображает плоскость комплексного переменного z в себя. Если рассматривать функцию w на некоторой фигуре, то её образом будет тоже фигура. Учитывая, что $w = |a|e^{i\arg a}z + b$, можно построить образы фигур.

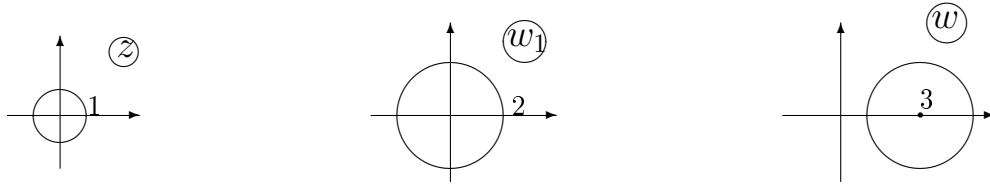
Пример. НАЙТИ ОБРАЗ D_w КРУГА $D_z : |z| < 1$, ЕСЛИ $w = 2iz + 3$.

Рассмотрим функцию w как суперпозицию нескольких функций:

$$w_1 = 2z, \quad w_2 = iw_1, \quad w = w_2 + 3.$$

Функция w_1 отобразит D_z в $D_1 : |w_1| < 2$, т.к. $|w_1| = 2|z|$. Функция w_2 повернет круг D_1 на $\pi/2$ вокруг центра $w_1 = 0$, т.е. отобразит D_1 в себя.

Функция w круг D_1 параллельно сдвинет на 3. Следовательно, образом D_w будет круг $|w - 3| < 2$.



2. Показательная функция. Определим функцию

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Отсюда следует, что $|e^z| = e^x$, $\text{Arg} e^z = y + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Показательная функция является периодической с периодом $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$.

3. Тригонометрические функции. Для вещественных значений x из формулы Эйлера имеем

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Используем эти формулы для определения тригонометрических функций комплексного аргумента:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \text{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

4. Логарифмическая функция. Определим многозначную логарифмическую функцию $w = \text{Ln} z$ как обратную к показательной. Тогда $e^w = z$ и при $w = u + iv$ получим $e^u e^{iv} = |z| e^{i \arg z}$, откуда имеем $u = \ln |z|$, $v = \arg z + 2\pi k = \text{Arg} z \implies w = \text{Ln} z = \ln |z| + i \text{Arg} z$.

Пример. РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ $\cos z = i$.

По определению имеем:

$$\begin{aligned} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i. \text{ Отсюда } e^{2iz} - 2ie^{iz} + 1 = 0 \implies e^{iz} = i \pm \sqrt{-2} = \\ i \pm i\sqrt{2} = i(1 \pm \sqrt{2}) \implies iz = \text{Ln} i(1 \pm \sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} \pm 1) \pm i\pi/2 + 2k\pi i, \\ z = \pm\pi/2 + 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} \pm 1), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

16 Найти образ круга $|z| < 1$, если:

- 1) $w = 3z$, 2) $w = 4iz$, 3) $w = -4iz - 1$, 4) $w = -iz + 2$,
- 5) $w = -2iz + 1 - 2i$, 6) $w = 2iz + 3 - i$.

17 Найти образ круга $|z| < r$, если $w = az + b$.

18 Решить уравнения:

1) $e^z = -3 + 4i$, 2) $e^z = 1 + i$, 3) $\sin z = 3$, 4) $\operatorname{tg} z = 1 + 2i$.

19 Пусть $w = e^z$. Найти образ области:

1) $-\infty < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi$,

2) $0 < \operatorname{Re} z < +\infty, 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$.

ТЕМА 5

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МНОГОЧЛЕНАХ

Многочленом называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где a_0, a_1, \dots, a_n – коэффициенты, в общем случае комплексные. Число x_1 называется корнем многочлена, если $P_n(x_1) = 0$.

Имеют место следующие утверждения.

1°. Многочлен $P_n(x)$ с вещественными или комплексными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный или комплексный корень (без доказательства).

2°. Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на линейный множитель $(x - c)$ равен $P_n(c)$, причём $P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x) + P_n(c)$.

Доказательство. Деля углом $P_n(x)$ на $x - c$ получим в частном некоторый многочлен степени $n - 1$, а в остатке $A = \text{const}$. Поэтому имеем тождество $P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x) + A$. Полагая в нём $x = c$, получим $A = P_n(c)$.

3°. Следствие из теоремы Безу. Для того чтобы число $x = c$ было корнем многочлена $P_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $P_n(x)$ без остатка делился на $(x - c)$, т.е. $P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x)$.

4°. Основная теорема алгебры.

Многочлен $P_n(x)$ с вещественными или комплексными коэффициентами имеет ровно n корней, вещественных или комплексных.

Доказательство. Т.к. многочлен имеет хотя бы один корень x_1 , то из 3° следует тождество $P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$. В свою очередь, $P_{n-1}(x)$ тоже

многочлен, и хотя бы один корень x_2 у него есть, поэтому

$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x)$. Продолжая последовательно понижать степень многочлена в правой части равенства, придём к тождеству

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)P_0,$$

откуда сравнением коэффициентов при x^n получим $P_0 = a_0$.

5°. Рассмотрим случай многочлена $P_n(x)$ с вещественными коэффициентами.

Докажем, что, если $x_1 = \alpha + i\beta$, то существует второй корень $x_2 = \bar{x}_1 = \alpha - i\beta$.

Действительно, пусть $P_n(\alpha + i\beta) = 0 \iff a_0(\alpha + i\beta)^n + a_1(\alpha + i\beta)^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Возьмём в последнем равенстве комплексное сопряжение:

$$a_0(\alpha - i\beta)^n + a_1(\alpha - i\beta)^{(n-1)} + \dots + a_n = 0. \iff P_n(\alpha - i\beta) = 0$$

Теперь по основной теореме алгебры имеем

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n),$$

где комплексные корни входят парами, причём $(x - x_1)(x - \bar{x}_1) = x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$. Кроме того, корни как вещественные, так и комплексные, могут быть кратными. Поэтому после переобозначения корней окончательно имеем

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2}\dots(x - \alpha_m)^{r_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1}\dots(x^2 + p_sx + q_s)^{k_s}, \quad (2)$$

где все скобки различны, $n = r_1 + r_2 + \dots + r_m + 2k_1 + \dots + 2k_s$, $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ — вещественные, различные, $p_j^2 - 4q_j < 0$, $j = \overline{1, s}$.

Пример. НАЙТИ КОРНИ МНОГОЧЛЕНА $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ И РАЗЛОЖИТЬ ЕГО НА МНОЖИТЕЛИ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, Т.Е. ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ (2).

Целочисленные корни многочлена являются делителями его свободного члена. Учитывая это, подберём корень $x_1 = 1$. Деля углом $P(x)$ на $(x - 1)$, получим $x^2 - 2x + 5$, откуда $x_2 = 1 + 2i$, $x_3 = 1 - 2i$. Разложение на множители имеет вид: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x - 1)(x^2 - 2x + 5)$.

ЗАДАЧИ

20 Найти корни многочленов $P(x)$ и разложить их на множители с вещественными коэффициентами в виде (2):

- 1) $P(x) = x^2 + 4x + 3$, 2) $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$,
3) $P(x) = x^2 + 2x + 10$, 4) $P(x) = x^3 - 8$, 5) $P(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3$,
6) $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, 7) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, 8) $P(x) = x^5 + 8x^3 + 16x$,
9) $P(x) = x^4 - 1$, 10) $P(x) = x^4 + 4x^2 + 3$, 11) $P(x) = x^4 + 4$,
12) $P(x) = x^5 - 10x^3 + 9x$, 13) $P(x) = x^8 - 2x^4 + 1$, 14) $P(x) = x^8 - 1$,
15) $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, 16) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 10$, 17*) $P(x) = x^6 + 64$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

ВАРИАНТ 1

- 1°. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если
 $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$. Изобразить на комплексной плоскости комплексное число z_1 и сопряженное с ним.
- 2°. Решить уравнение: $x^2 + 10x + 29 = 0$.
- 3°. Извлечь корень из комплексного числа, изобразить на комплексной плоскости результат: $\sqrt[6]{64i}$.
- 4°. Найти корни многочлена и разложить его на множители с вещественными коэффициентами: $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$.
- 5°. Найти образ круга $|z| > 3$, если $w = (1 + i)z + 4i$.

ВАРИАНТ 2

- 1°. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если
 $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + i$. Изобразить на комплексной плоскости комплексное число z_1 и сопряженное с ним.
- 2°. Решить уравнение:
 $2x^2 + 4x + 3 = 0$.
- 3°. Извлечь корень из комплексного числа, изобразить на комплексной плоскости результат:
 $\sqrt[4]{-5 - 5i}$.

4°. Найти корни многочлена и разложить его на множители с вещественными коэффициентами: $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5$.

5°. Найти образ круга $|z| < 3$, если $w = (2 + 3i)z + i - 6$.

О Т В Е Т Ы

- 2** 1) $z_1 + z_2 = 1 + 7i$, $z_1 - z_2 = -3 - i$, $z_1 z_2 = -14 + 2i$, $z_1/z_2 = (1 + i)/2$
 2) $z_1 + z_2 = 2 + 3i$, $z_1 - z_2 = 4 - 7i$, $z_1 z_2 = 7 + 17i$, $z_1/z_2 = -(1 + i)/2$,
 3) $z_1 + z_2 = 1 + 3i$, $z_1 - z_2 = -1 + i$, $z_1 z_2 = -2 + 2i$, $z_1/z_2 = 1 + i$,
 4) $z_1 + z_2 = 2 + 4i$, $z_1 - z_2 = 2 - 6i$, $z_1 z_2 = 5 + 10i$, $z_1/z_2 = -(1 + 2i)/5$.

3 1) $5 - 12i$, 2) $2i - 2$, 3) $-i$, 4) 1 .

- 4** 1) $x_{1,2} = \pm 5i$, 2) $x_{1,2} = \pm 7i$, 3) $x_{1,2} = 1 \pm 2i$, 4) $x_{1,2} = -2 \pm 3i$,
 5) $x_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{3}$, 6) $x_{1,2} = 1 \pm i$.

6 $w_1 = -2i$, $w_2 = 12e^{\frac{\pi i}{4}}$, $w_3 = 10e^{\frac{5\pi i}{12}}$, $w_4 = 3e^{-\frac{2\pi i}{3}}$.

- 7** $z_1 = e^2(\cos 3 + i \sin 3)$, $z_2 = e^{-1}(\cos 3 + i \sin 3)$, $z_3 = \cos 4 + i \sin 4$,
 $z_4 = \cos 5 - i \sin 5$.

8 $z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$, $z_3 = 2e^{\frac{5\pi i}{6}}$, $z_4 = 2e^{-\frac{\pi i}{6}}$, $z_5 = 5e^{-\frac{\pi i}{2}}$,
 $z_6 = 6e^{\frac{\pi i}{2}}$, $z_7 = 64e^{\pi i}$, $z_8 = 4$.

- 10** 1) Окружность, 2) эллипс, 3) окружность, 4) окружность,
 5) дуга окружности, 6) отрезок прямой, 7) парабола, 8) дуга окружности.

12 1) -4 , 2) $-8i$, 3) $256e^{\frac{2\pi i}{3}}$, 4) $32e^{-\frac{5\pi i}{6}}$.

- 13** 1) $z_{1,2} = \pm\sqrt{6}e^{\pi i/4}$, 2) $z_k = 2e^{(-\pi/12+k\pi/3)i}$, $k = \overline{0, 5}$,
 3) $z_k = \sqrt[6]{2}e^{(-\pi/12+2k\pi/3)i}$, $k = \overline{0, 2}$, 4) $z_k = \sqrt[4]{2}e^{(-\pi/24+k\pi/2)i}$, $k = \overline{0, 3}$,
 5) $z_{1,2} = \pm e^{-\pi i/4}$, 6) $z_k = e^{2k\pi i/3}$, $k = \overline{0, 2}$, 7) $z_k = 2e^{(\pi/15+2k\pi/5)i}$, $k = \overline{0, 4}$,
 8) $z_k = 2e^{(\pi/3+2k\pi/3)i}$, $k = \overline{0, 2}$.

- 14** 1) $z_k = e^{2k\pi i/8}$, $k = \overline{0, 7}$, 2) $z_k = e^{(\pi/3+2k\pi/3)i}$, $k = \overline{0, 2}$,
 3) $z_k = \sqrt[10]{2}e^{(3\pi/20+2k\pi/5)i}$, $k = \overline{0, 4}$, 4) $z_k = e^{(-\pi/6+2k\pi/3)i}$, $k = \overline{0, 2}$.

- 16** 1) $|w| < 3$, 2) $|w| < 4$, 3) $|w + 1| < 4$, 4) $|w - 2| < 1$,
 5) $|w - 1 + 2i| < 2$, 6) $|w - 3 + i| < 2$.

17 $|w - b| < |a|r$.

18 1) $z_k = \ln 5 + i[(2k + 1)\pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}]$, 2) $z_k = \frac{1}{2} \ln 2 + i\pi(\frac{1}{4} + 2k)$,

$$3) z_k = \pi/2 + 2k\pi - i \ln(3 \pm 2\sqrt{2}), 4) z_k = \frac{1}{2}[(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}] + \frac{i}{4} \ln 5.$$

Здесь везде $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\boxed{19} \quad 1) 0 < |w| < 1, 0 < \arg w < \pi, 2) 1 < |w| < \infty, 0 < \arg w < \pi/2.$$

$$\boxed{20} \quad 1) x_1 = -1, x_2 = -3, P(x) = (x+1)(x+3), 2) x_1 = 1/2, x_2 = 2, \\ P(x) = 2(x-2)(x-1/2), 3) x_{1,2} = -1 \pm 3i, 4) x_1 = 2, x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i, \\ P(x) = (x-2)(x^2+2x+4), 5) x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = x_5 = 3, \\ P(x) = x^3(x-3)^2, 6) x_1 = x_2 = i, x_3 = x_4 = -i, P(x) = (x^2+1)^2, \\ 7) x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1, P(x) = (x-1)^2(x+1), 8) x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2i, \\ x_4 = x_5 = -2i, P(x) = x(x^2+4)^2, 9) x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm i, \\ P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1), 10) x_{1,2} = \pm i, x_{3,4} = \pm \sqrt{3}i, \\ P(x) = (x^2+3)(x^2+1), 11) x_{1,2} = 1 \pm i, x_{3,4} = -1 \pm i, \\ P(x) = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2), 12) x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1, x_{4,5} = \pm 3, \\ P(x) = x(x-1)(x+1)(x-3)(x+3), 13) x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1, \\ x_5 = x_6 = i, x_7 = x_8 = -i, P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2, \\ 14) x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm i, x_{5,6} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), x_{7,8} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i), \\ P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1), 15) x_1 = 2, \\ x_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2, P(x) = (x-2)(x^2+x+1), 16) x_1 = -2, \\ x_{2,3} = (5 \pm \sqrt{15}i)/4, P(x) = (x+2)(2x^2-5x+5).$$